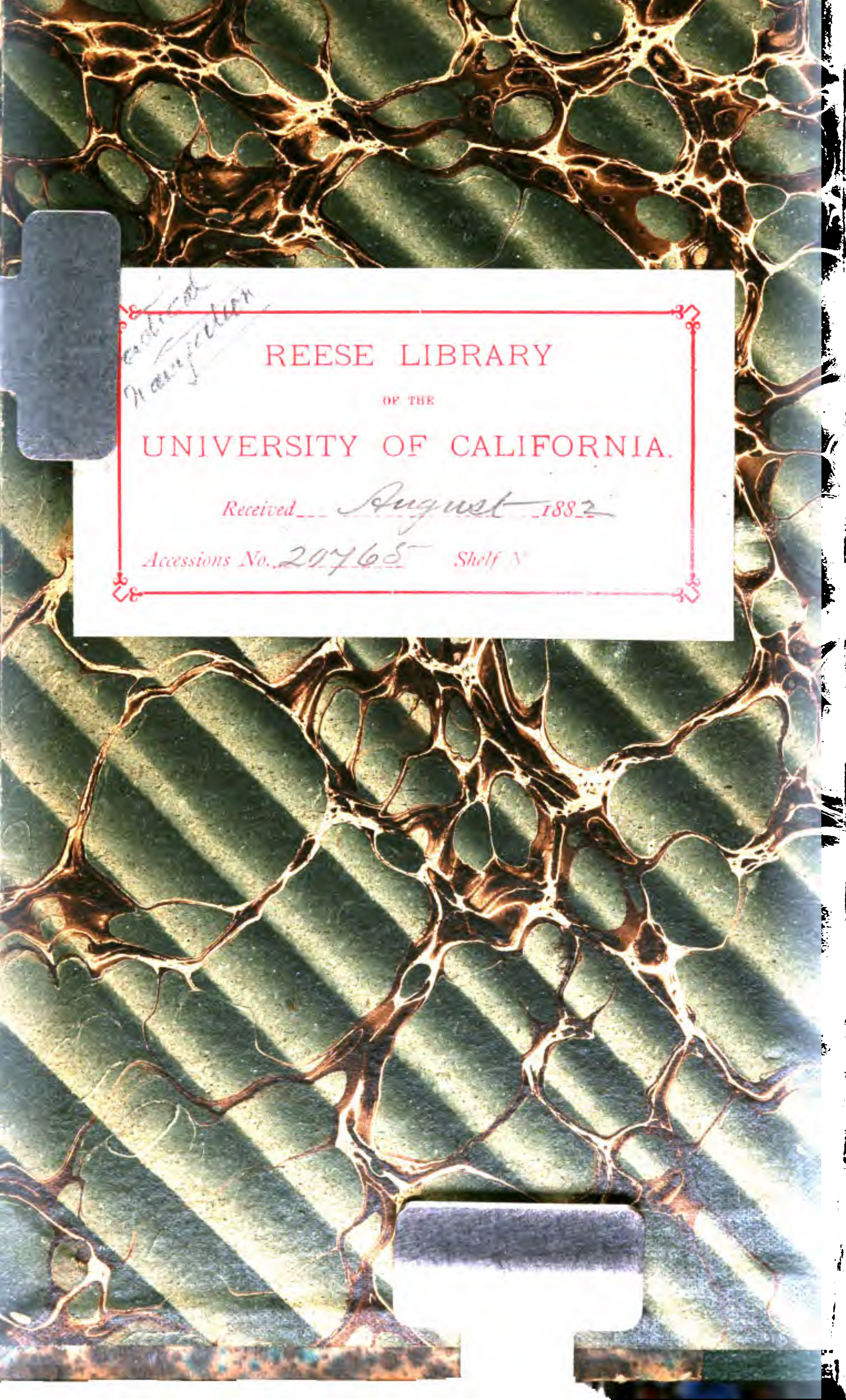

$B 16 577


REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Received August 1882
Accessions No. 20765 Shelf No



COURS

D'ASTRONOMIE NAUTIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

COURS

D'ASTRONOMIE NAUTIQUE,

PAR

M. H. FAYE,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

de la Société royale astronomique de Londres,

de l'Académie des Sciences et des Arts d'Amérique, de l'Académie royale de Belgique

de l'Institut royal de Venise, etc.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

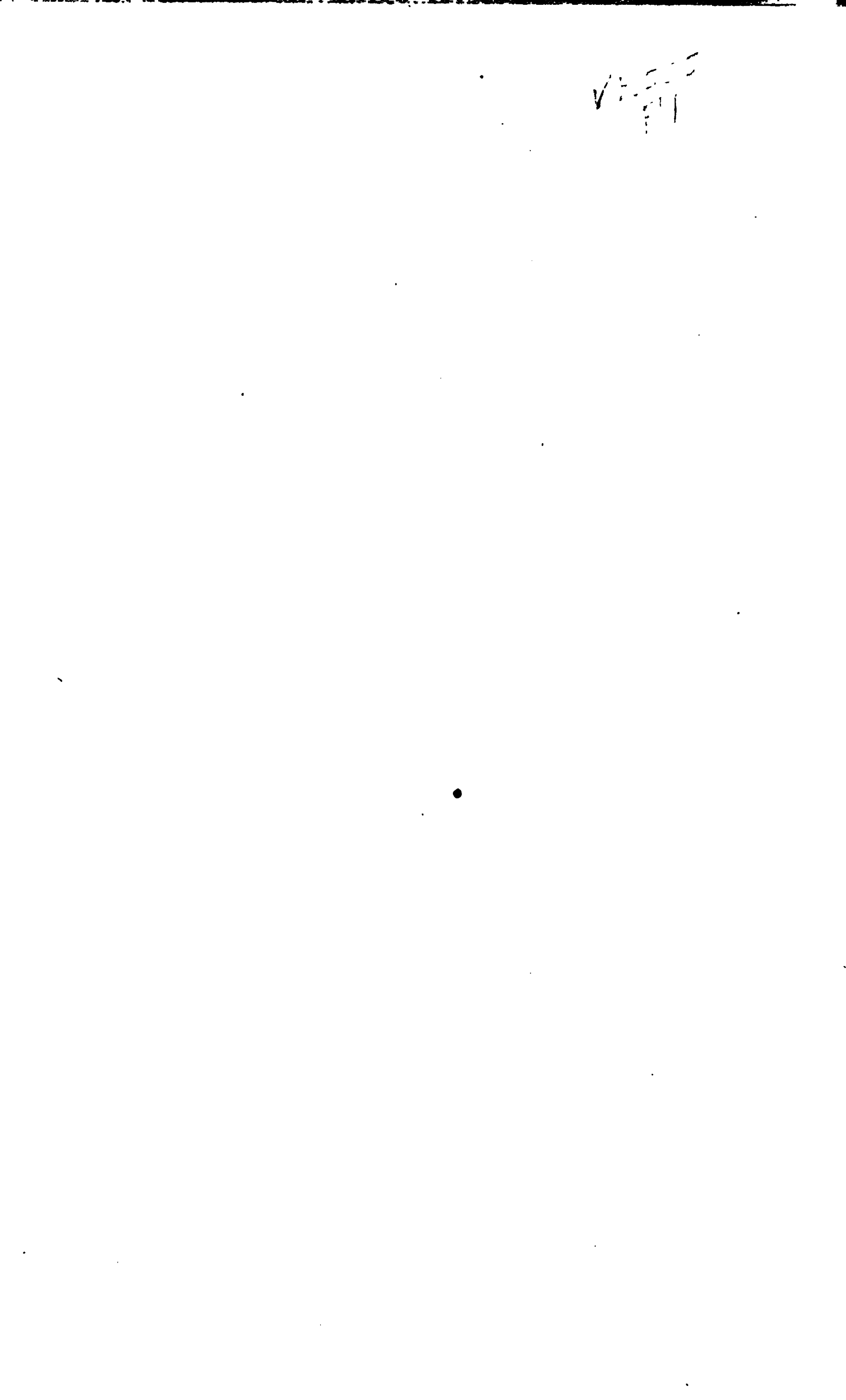
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—

1880



COURS
D'ASTRONOMIE NAUTIQUE.

AVERTISSEMENT.

De toutes les applications de l'Astronomie, la plus belle est celle qu'on en fait chaque jour à la Navigation. Cette partie ne saurait donc être passée sous silence dans le Cours dont l'auteur a l'honneur d'être chargé à la première division de l'École Polytechnique, École qui a d'ailleurs le privilège de fournir chaque année quelques officiers à notre flotte et des ingénieurs à l'Hydrographie, à l'Architecture navale, à tous les travaux des ports. Mais, à l'École, la partie nautique n'est représentée que par un très petit nombre de leçons. En la développant ici, l'auteur s'est proposé de pousser chaque question jusqu'aux derniers détails de la pratique journalière. Ce Livre a donc été écrit spécialement pour les marins de nos deux flottes militaire et commerciale, et pour les voyageurs géographes qui emploient les mêmes méthodes. Il pourra servir néanmoins à d'autres catégories de lecteurs, à ceux du moins qui jugent que l'étude d'une science gagne quelque chose à n'être pas séparée de ses plus utiles applications.

L'Ouvrage est divisé en deux Parties, l'une théorique, l'autre pratique. La première comprend l'Astronomie sphérique, c'est-à-dire les lois du mouvement diurne, la mesure du temps, les divers systèmes de coordonnées basés sur la rotation de notre globe, les formules de transformation qui servent à passer de l'un à l'autre, soit que la direction de l'axe ait été modifiée, soit qu'on ait simplement changé d'origine. On y trouvera l'étude des réfractions atmosphériques et de la dépression de l'horizon de la mer, celle des instruments de mesure et en particulier des chronomètres, que l'auteur a eu surtout en vue de simplifier, enfin la théorie des erreurs, véritable trait d'union entre la théorie et la pratique.

La seconde Partie traite de la Navigation par estime et de ses instruments spéciaux, le loch, la boussole et les Cartes marines. On a cherché à rendre aisément accessibles les méthodes et les calculs de régulation des compas. Puis vient la Navigation astronomique, comprenant les observations circumméridiennes, le problème de Douwes, l'emploi graphique des droites et des cercles de hauteur, les distances lunaires, les relèvements de points terrestres en vue pour régler les chronomètres.

L'auteur n'a pas hésité à se servir des premières notions du Calcul différentiel, qui rentrent aujourd'hui dans l'enseignement ordinaire des Mathématiques, mais il s'est attaché à faire disparaître les longs développements en séries et les formules plus ou moins approchées qu'on en déduit; il n'emploie que les formules rigoureuses, plus simples d'ordinaire, et ramène la solution des divers problèmes à trois équations fondamentales, qui reviennent sans cesse et finissent par se graver profondément dans la mémoire. Il donne sur chaque question des exemples numériques et fait apprécier en chaque cas l'influence des erreurs inévitables de l'observation. Grâce à cette marche, il

croit avoir réussi à donner un Traité complet sous un volume fort réduit.

Ce n'est pas sans quelque espoir de succès que l'auteur présente ce Traité aux hommes de science et aux marins; mais, sachant qu'une forme nouvelle est souvent un obstacle fort sérieux, il s'est décidé à le publier à ses frais, pour ne pas faire courir de risques à un honorable éditeur (qui n'eût pourtant pas hésité), dans le cas où les innovations qu'il s'est permises ne seraient pas favorablement accueillies. Tel est, par exemple, le parti pris de ne pas changer de conventions en passant d'un hémisphère à l'autre, et celui de compter en tout climat les azimuts, les angles de route, les relèvements à la boussole à partir de la même origine, le sud, et dans le même sens, sud-ouest-nord-est, de 0° à 360°. L'auteur n'a pas cherché par là à se singulariser; il a voulu tout simplement n'avoir que des formules générales et éviter au lecteur, au calculateur surtout, le trouble d'une foule d'interprétations, de prescriptions particulières pour tel ou tel cas, et les erreurs qui en résultent si aisément au moindre oubli. Il espère que les marins voudront bien, en parcourant cet Ouvrage, surmonter une première impression de contrariété et lui pardonner ces dérogations aux usages établis en faveur de leur utilité; ils en donnent d'ailleurs plus d'un exemple dans leurs propres publications.

M. le lieutenant de vaisseau A. Collet, répétiteur du Cours d'Astronomie pure et appliquée à l'École Polytechnique, a bien voulu revoir les épreuves et en assurer la correction.

TABLE DES MATIÈRES.

PARTIE THÉORIQUE.

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE.

THÉORIE DES INSTRUMENTS DE MESURE.

THÉORIE DES ERREURS.

PARTIE PRATIQUE.

NAVIGATION PAR L'ESTIME.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES A LA MER.

DÉTERMINATION ASTRONOMIQUE DE L'HEURE DE PARIS.

SYMBOLES ET CONVENTIONS.

Coordonnées horaires des astres : Æ, δ.

Æ, angle horaire compté de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h, dans le sens du mouvement diurne du ciel (vers l'ouest), à partir de la région supérieure et australe du méridien local.
δ, distance polaire, comptée de 0° à 180°, à partir du pôle nord, en tout climat.
(Æ), différence des angles horaires de deux astres.

Coordonnées zénithales : A, *z*.

A, azimut astronomique, compté, en tout climat, de 0° à 360°, à partir du point S. de l'horizon, dans le sens S.-O.-N.-E.
z, distance zénithale, comptée de 0° à 180°, à partir du zénith.
(A), différence des azimuts de deux points.

Coordonnées loxodromiques : V, *v*.

V, azimut loxodromique d'un point ou angle de route, compté comme les azimuts ordinaires.
v, distance loxodromique d'un point à la station de l'observateur.
d, dérive comptée positivement quand elle a lieu dans le sens où croissent les azimuts.

Boussole : M, M′, D, δ.

M′, azimut magnétique apparent fourni par la boussole et compté, en tout climat, comme les A et les V, de 0° à 360°, à partir de la pointe S. de l'aiguille aimantée, à bord.
M, azimut magnétique vrai, compté à partir de la pointe S. d'une aiguille aimantée soustraite à l'action du fer à bord.
δ, déviation de l'aiguille à bord; $\delta = M - M'$.
D, déclinaison de la pointe S. de l'aiguille aimantée hors du navire ou azimut du méridien magnétique, compté du S. dans le sens S.-O.-N.-E.

Mesure du temps en un lieu donné.

Heures usitées à bord : H, H_v, H_s, H_p, H_{sp}.

H, heure du temps moyen du lieu.
H_v, heure solaire vraie $= H - e$.
H_s, heure sidérale.
H_p, heure moyenne à Paris correspondante à l'heure H du lieu.
H_{sp}, heure sidérale à Paris correspondante à l'heure H_s du lieu.
e, équation du temps à *retrancher* de l'heure moyenne pour avoir l'heure vraie.
m, marche ou retard diurne d'un chronomètre.

Coordonnées géographiques : L, λ.

L, longitude du lieu, comptée de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h, dans le sens opposé au mouvement diurne (vers l'est), à partir du méridien de Paris.
λ, colatitude du lieu, comptée en tout climat à partir du pôle nord, de 0° à 180°.
r ou r_1, rayon de la Terre supposée sphérique.
a, demi-grand axe de l'ellipsoïde terrestre; e, excentricité de l'ellipse génératrice.
N, grande normale au lieu considéré.

Coordonnées uranographiques : Æ, δ.

Æ, ascension droite d'un astre, comptée de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h, dans le sens direct (vers l'est), à partir du méridien céleste du point γ.
δ, distance d'un astre au pôle nord, comptée de 0° à 180°.
γ, point vernal, nœud ascendant (intersection) de l'écliptique sur l'équateur. Le méridien céleste du point est l'origine des Æ, et son passage au méridien terrestre d'un lieu marque l'origine du jour sidéral en ce lieu.

Corrections diverses pour passer du lieu apparent d'un astre à son lieu vrai et géocentrique.

ρ, réfraction astronomique.
p, parallaxe du Soleil.
P, parallaxe de la Lune.
d, d', distance du Soleil ou de la Lune.
∂, distance angulaire d'un astre à la Lune.
Δ, Δ', diamètres angulaires du Soleil ou de la Lune.

Les lettres sans indice répondent au centre de la Terre; les lettres avec l'indice 1 répondent à la station de l'observateur.

Théorie des erreurs.

n, nombre des observations.
ε_1, erreur moyenne d'une observation.
η, erreur probable.

Chronométrie.

θ, température du chronomètre.
t, temps écoulé à partir d'une date donnée.
m, marche ou retard diurne du chronomètre.

Symboles mathématiques.

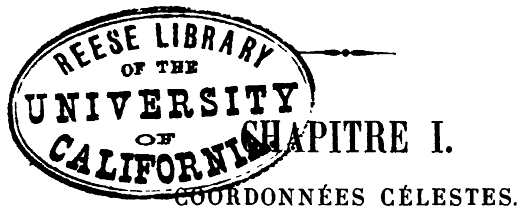
log, logarithme ordinaire.
$\mathcal{L}$, logarithme népérien.
e, base des logarithmes népériens.
n mis après un logarithme rappelle que le nombre correspondant doit être pris avec le signe —.
σ, sinus verse; $\sigma a = 1 - \cos a$.
φ, angle auxiliaire.

Doubles emplois.

δ, tantôt distance d'un astre au pôle, tantôt déviation de la boussole.
e, excentricité de l'ellipsoïde terrestre, excentricité dans le sextant, base des logarithmes népériens, équation du temps.
r, rayon d'une couche terrestre, réduction au méridien.
v, distance loxodromique d'un point, distance de ce point en arc de grand cercle, angle au centre.

PARTIE THÉORIQUE.

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE.



CHAPITRE I.

COORDONNÉES CÉLESTES.

Mouvement diurne.

Nous rappelons ici très succinctement les premières notions de Cosmographie. La Terre est un ellipsoïde de révolution légèrement aplati et animé, autour de son plus petit axe, d'un mouvement de rotation parfaitement uniforme qui nous sert à mesurer le temps. La durée d'une rotation est l'unité de temps appelée *jour sidéral;* c'est l'intervalle de deux retours successifs d'une étoile à la même direction. Ce mouvement de rotation, pour un observateur placé dans le sens de l'axe, le haut de la tête dirigé vers les Ourses (pôle arctique), s'exécute de droite à gauche, en sens inverse des aiguilles d'une montre. C'est le sens que les astronomes nomment *direct.*

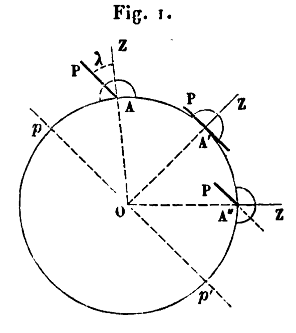
L'interposition de l'atmosphère forme, pour l'observateur placé à la surface de la Terre, une sorte de fond de tableau sphérique sur lequel viennent se peindre les astres vus en perspective. C'est le ciel de l'observateur. Lorsque celui-ci se déplace sur le globe terrestre, ce ciel, dont il occupe le centre, le suit ou plutôt se reforme pour lui. Le mouvement de rotation de la Terre produit l'illusion du mouvement diurne. Les astres

semblent tourner, en sens inverse de la rotation terrestre, autour d'un axe parallèle à celui de la Terre et passant par l'œil du spectateur. La distance des étoiles est telle, que, pour ces astres, cette parallèle se confond sensiblement avec l'axe de la Terre. En d'autres termes, les dimensions de ce globe sont pratiquement nulles vis-à-vis de ces distances.

En effet le rayon de la Terre, vu du Soleil, ne sous-tend qu'un très petit angle de 8″,86; vu des étoiles, dont la plus voisine de nous est deux cent mille fois plus éloignée que le Soleil, ce même rayon ne sous-tend que 0″,0000443. Tous les phénomènes du mouvement diurne s'accomplissent donc comme si la Terre n'était qu'un point sans dimensions appréciables. Il en est autrement du Soleil et des planètes, de la Lune surtout, qui est quatre cents fois moins éloignée de nous que le Soleil. Pour ces astres, le rayon terrestre n'est plus négligeable, et nous serons obligés de distinguer entre la station de l'observateur et le centre de la Terre où nous devrons rapporter nos mesures.

L'aspect du ciel varie d'une station à l'autre, lorsque l'observateur s'éloigne du pôle arctique pour se rapprocher du pôle opposé.

Fig. 1.

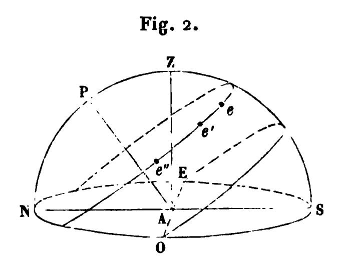


Ce qui détermine cet aspect, c'est la distance angulaire du zénith au pôle arctique, angle nommé *colatitude du lieu* et représenté par la lettre λ. En considérant cet aspect aux points A, A′, A″, on voit qu'il varie du tout au tout, depuis $\lambda = 0$ jusqu'à $\lambda = 180°$. Le sens même de la rotation diurne du ciel semble

être renversé en A″; mais cela tient à ce que l'observateur, parvenu en ce point et se plaçant dans le sens de la verticale A″Z, s'est en quelque sorte renversé lui-même. Pour retrouver le sens réel de rotation tel qu'il a été défini, il lui faut prendre par la pensée la position A″P, le haut de la tête tourné vers les Ourses.

Considérons ces phénomènes en une station déterminée A.

Fig. 2.



Le plan de l'horizon qui partage la sphère céleste dont l'œil de l'observateur A est le centre en deux parties, l'une visible parce qu'elle est située au-dessus du globe terrestre, l'autre invisible parce qu'elle est masquée par ce globe lui-même, est le plan tangent en A à la Terre. La verticale AZ est un axe de symétrie de la portion visible; AP, parallèle à la ligne des pôles terrestres, est l'axe du mouvement diurne. Le plan de ces deux axes est donc un plan de symétrie par rapport aux phénomènes dus à ce mouvement. C'est le plan méridien dont la trace horizontale NS est la méridienne du lieu. Tous les points brillants de la voûte céleste paraissent décrire sur cette voûte, d'un commun mouvement, des parallèles sphériques centrés sur AP dont les points culminants se trouveront sur le méridien SZPN. Ils semblent se lever sur le demi-cercle SEN de l'horizon, monter obliquement dans le ciel, passer au méridien où ils atteignent leur maximum de hauteur angulaire, puis baisser de plus en plus et se coucher sur le demi-cercle SON. Si l'on suit une de ces étoiles dans ses positions successives e, e', e'', ..., on voit que la distance angulaire Pe au pôle reste constante et que l'angle dièdre SPe va en croissant proportionnellement au temps.

Coordonnées horaires.

Il est donc naturel, pour rapporter ces astres à un système de coordonnées sphériques, de prendre pour axe la ligne des pôles, pour plan fixe, à partir duquel on devra compter la rotation, le méridien. Alors les coordonnées de l'étoile e à un certain instant seront

$$Pe, \text{ distance polaire, ou } \delta,$$

angle que nous compterons à partir du pôle nord, de 0° à 180°,

$$SPe, \text{ angle dièdre nommé angle horaire } \mathcal{AH},$$

que nous compterons dans le sens du mouvement diurne, de 0° à 360°, en partant du méridien supérieur PZS.

Il est évident que, les étoiles étant réellement immobiles dans l'espace et l'axe de la rotation uniforme de la Terre conservant toujours même direction ([1]), on aura

$$\delta = \text{const.},$$
$$\mathcal{AH} \text{ proportionnel au temps.}$$

Mesure du temps. — Jour sidéral.

De là résulte la mesure la plus parfaite du temps. Nous prendrons pour unité le jour sidéral, c'est-à-dire le temps d'une révolution apparente du ciel, le temps pendant lequel l'$\mathcal{AH}$ d'une étoile passe de 0° à 360°.

Si nous divisons le jour en vingt-quatre heures, chaque heure représentera une variation de l'angle horaire $\mathcal{AH}$ égale à $\frac{360°}{24} = 15°$. Ainsi la mesure du temps sera ramenée à celle de l'angle horaire d'un point du ciel convenu. Ce point de convention se nomme le *point vernal*, désigné par les astronomes par le signe γ. Dès lors l'heure sidérale en un lieu donné ne

([1]) Du moins quand on néglige les lents déplacements dus à la précession et à la nutation.

sera autre chose que l'angle horaire du point vernal exprimé en heures :

$$H_s = Æ\!H_{\gamma}.$$

Coordonnées uranographiques.

Pour décrire le ciel, c'est-à-dire pour déterminer les positions relatives des astres qu'on y voit en perspective, nous adopterons un nouveau système de coordonnées ayant encore pour axe la ligne des pôles et pour plan origine le méridien céleste qui passe par le point γ. Alors, sur une pareille sphère idéale dont tous les points représentent les directions émanées du

Fig. 3.

centre, les coordonnées d'une étoile, coordonnées qui n'ont plus aucun rapport avec la position particulière d'un observateur, seront

$$Pe = \text{distance polaire } \delta,$$
$$\text{angle dièdre } \gamma Pe = \text{ascension droite } Æ\!R = \text{const.};$$

δ se comptera comme tout à l'heure de $0°$ à $180°$ à partir du point P; Æ se comptera, pour les diverses étoiles fixées à la surface de cette sphère idéale, de $0°$ à $360°$ à partir du méridien $P\gamma P'$; seulement, dans un but dont on se rendra compte tout à l'heure, nous compterons les Æ des diverses étoiles en sens inverse du mouvement diurne apparent, c'est-à-dire dans le sens direct.

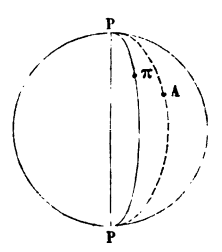
Coordonnées géographiques.

De même, pour décrire le globe terrestre, nous rapporterons les points de sa surface à l'axe de rotation, identique avec la

ligne des pôles célestes. Un point A sera donné par sa distance polaire PA et par un angle dièdre compté à partir d'un plan ou méridien terrestre choisi à volonté. Nous adopterons celui de Paris. Dès lors les coordonnées de A seront, si π désigne Paris,

$$\text{PA distance au pôle} = \text{colatitude } \lambda,$$
$$\text{angle dièdre } \pi\text{PA} = \text{longitude L.}$$

Fig. 4.



La colatitude se compte encore de 0° à 180° à partir du pôle arctique; la longitude se compte de 0° à 360°, ou de 0^h à 24^h, à partir du méridien $P\pi P'$, dans le sens direct, c'est-à-dire dans le même sens que les Æ et en sens opposé aux Æ.

Relations mutuelles de ces systèmes de coordonnées.

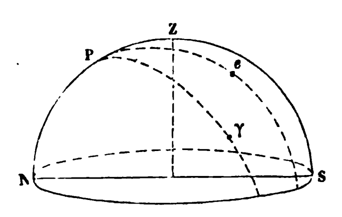
Si l'on se reporte à la *fig.* 1, on voit aisément que, les dimensions de notre globe étant négligeables vis-à-vis de la distance des étoiles, l'axe AP du mouvement apparent du ciel, vu du point A, se confond avec la ligne des pôles terrestres. Dès lors l'angle PAZ, que nous avons nommé *colatitude,* se confond avec l'angle du rayon terrestre OA avec OP, auquel nous donnons aussi le nom de *colatitude*. En d'autres termes, la colatitude géographique d'un point terrestre est égale à la distance polaire du zénith de ce même point : $\lambda = PZ$.

Secondement, l'heure sidérale en un lieu A étant égale (sauf le facteur 15) à l'angle horaire du point γ en ce lieu au même instant, il est aisé de voir, à l'inspection de la figure suivante, qu'on peut substituer, pour avoir l'heure sidérale, à l'angle horaire du point invisible γ, l'angle horaire d'une étoile quel-

conque augmenté de l'AR de ladite étoile. En effet, à l'instant représenté sur la figure ci-jointe, on a

$$H_s = \mathit{AH}_\gamma = SP\gamma.$$

Fig. 5.



Or

$$SP\gamma = SPe + \gamma Pe = \mathit{AH}_e + \mathit{AR}_e.$$

Donc

$$H_s = \mathit{AH}_e + \mathit{AR}_e,$$

en désignant par AH_e et AR_e l'angle horaire de l'étoile *e* et son ascension droite. Si l'on prenait l'étoile *e* à l'instant où elle passe au méridien, AH serait nul, et l'on aurait

$$H_s = \mathit{AR}_e.$$

Donc l'heure sidérale est égale à l'ascension droite de toute étoile qui passe à ce moment au méridien. Ces relations si simples et si utiles exigent évidemment que les AR des étoiles se comptent en sens inverse des AH.

En troisième lieu, la figure suivante montre que la longitude géographique du lieu A est égale à l'excès de l'heure du lieu sur celle que l'on compte à Paris au même instant.

Fig. 6.

En effet, l'observateur se trouvant en A sur le globe ter-

restre, ses coordonnées géographiques seront

$$\text{colatitude} = \quad pA = \lambda,$$
$$\text{longitude} = \pi p A = L,$$

$p\pi p'$ étant le méridien de Paris. Menons par AP un plan $P\pi'$ parallèle au méridien de Paris. Les dimensions Op du globe terrestre étant comme nulles par rapport aux distances des astres, ces deux plans parallèles n'en font réellement qu'un. Cela posé, si à un instant quelconque le point vernal se projette en γ sur le ciel du point A, l'heure sidérale H_s en ce lieu sera à cet instant mesurée par $Æ_\gamma$, c'est-à-dire par $SP\gamma$. Au même instant, le même point vernal aura pour angle horaire, à partir du méridien de Paris, l'angle $\pi' P\gamma$, en sorte que l'heure de Paris, à cet instant-là, sera

$$H_{sp} = \pi' P\gamma.$$

Or la figure nous donne la relation

$$SP\pi' = SP\gamma - \pi' P\gamma.$$

Comme $SP\pi' = \pi p A = L$, on aura donc

$$L = H_s - H_{sp}.$$

En récapitulant ces relations fondamentales, on voit que

Colatitude d'un lieu.....	$\lambda \;= PZ =$ distance du zénith au pôle,
Heure sidérale d'un lieu.	$H_s = Æ_\gamma = Æ_* + Ʀ_*$,
Longitude d'un lieu.....	$L \;= H_s - H_{sp}$.

Système de coordonnées mesurables en mer ; coordonnées zénithales.

A terre il serait aisé de construire un instrument pour mesurer ces diverses coordonnées, angles horaires et distances au pôle, et par suite pour déterminer en un lieu quelconque l'heure sidérale, la colatitude et la longitude. On donnerait à cet instrument un axe de rotation parallèle à la ligne des pôles. Il en existe en effet de tels dans les observatoires fixes, sous le nom de *lunette équatoriale*. Mais, en mer, on ne saurait retrouver ainsi à tout instant la direction de la ligne des pôles;

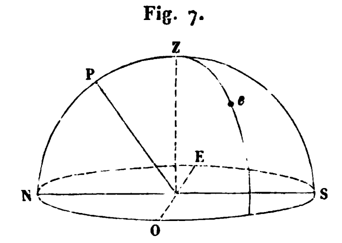
on ne dispose que de l'horizon et indirectement du zénith; on ne mesure que les hauteurs angulaires ou les distances zénithales des astres. Il nous faut donc introduire ici un nouveau système de coordonnées rapportées à la verticale. Nous chercherons plus tard les formules nécessaires pour déduire, de ces coordonnées, celles qui viennent de nous fournir si aisément l'heure, la colatitude et la longitude du lieu. Les coordonnées d'un point du ciel, dans ce dernier système, seront

$Ze = z$, distance zénithale de l'astre e

et l'angle dièdre

$SZe = A$, azimut de l'astre e.

Fig. 7.



L'origine des angles dièdres est arbitraire, comme dans les systèmes précédents. Pour faciliter la transformation des coordonnées zénithales en coordonnées horaires, nous prendrons pour origine commune des A et des Æ le méridien du lieu. Les z se comptent de 0° à 180°, bien qu'on n'ait guère à en considérer de plus grands que 90°. Les A se comptent de 0° à 360° dans le sens rétrograde, à partir de la partie australe ZS du méridien. Répétons bien que le sens dans lequel croissent les azimuts est marqué sur l'horizon par SONE. Nous nous attacherons invariablement à cette convention, au lieu de prendre comme les marins, pour origine, tantôt le point S, tantôt le point O, tantôt le point N, et de compter ces angles dièdres indifféremment dans un sens ou dans l'autre.

Le même système nous servira pour rapporter, à une même station A, les divers points du globe terrestre situés sur son horizon. Un point voisin e sera défini par

$Ae = r$, distance angulaire de e à A,

et l'angle dièdre

$$SAe = R,$$ ou azimut du point e sur l'horizon de A,

cet angle R étant compté comme les azimuts, de 0° à 360°, à partir du point S de la méridienne de A, dans le sens rétrograde SONE, sens de la marche des aiguilles d'une montre placée à plat. Nous verrons plus tard que, les navires ne décrivant pas des arcs de grand cercle tels que Ae, mais des arcs de loxodromie, nous devrons considérer r comme une portion de la courbe décrite et R, ou angle de route, comme l'azimut loxodromique constant que suit le navire.

CHAPITRE II.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

Nous avons dit tout à l'heure que les marins ne mesurent que des z. Pour déduire de ces mesures les coordonnées horaires qui fournissent l'heure, la colatitude et la longitude du lieu d'observation, il faut établir les relations algébriques qui existent entre ces deux systèmes de coordonnées rapportés à des axes différents, c'est-à-dire l'un à la verticale, l'autre à la ligne des pôles, axes dont l'angle est précisément la colatitude du lieu. On obtient très-aisément ces formules pour les coordonnées sphériques en s'appuyant sur celles des coordonnées rectilignes dans un plan; nous allons les rappeler.

Le point M est rapporté à un système d'axes rectangulaires OY, OZ par ses coordonnées

$$y = OP, \quad z = MP.$$

On fait tourner les axes d'un angle c dans le sens direct : on demande les coordonnées du point M par rapport aux nouveaux axes OY′, OZ′.

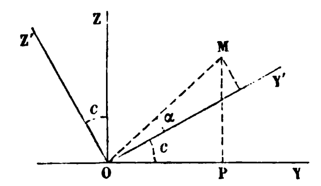
Désignons par α l'angle MOY'; on aura

$$y' = \text{OM}\cos\alpha, \quad z' = \text{OM}\sin\alpha.$$

D'autre part on a aussi, d'après la figure,

$$y = \text{OM}\cos(c+\alpha), \quad z = \text{OM}\sin(c+\alpha).$$

Fig. 8.



Développons $\cos(c+\alpha)$, $\sin(c+\alpha)$ et éliminons OM; il viendra

$$y = y'\cos c - z'\sin c,$$
$$z = y'\sin c + z'\cos c,$$

relations qui donnent facilement y' et z'. Ajoutons ces équations après avoir multiplié la première par $\cos c$, la seconde par $\sin c$:

$$y' = y\cos c + z\sin c.$$

Multipliez la première par $\sin c$, la seconde par $\cos c$, et retranchez :

$$z' = -y\sin c + z\cos c.$$

Si l'on avait fait tourner les axes de l'angle c en sens contraire, c'est-à-dire dans le sens rétrograde, il suffirait, pour obtenir les formules de transformation relatives à ce cas, de changer le signe de c dans ces relations, c'est-à-dire de changer le signe des termes qui contiennent c sous le signe sinus.

Passons aux coordonnées sphériques.

Considérons le système dont OA est l'axe, et un astre de direction OL se projetant en C sur une sphère de centre O et de rayon arbitraire r; ses coordonnées seront

$$\text{AC} = b,$$
$$\text{angle dièdre YAC} = \text{A}.$$

Inclinons l'axe OA dans le plan YOA d'un angle $\text{BOA} = c$ et prenons cette ligne OB pour axe d'un second système de coor-

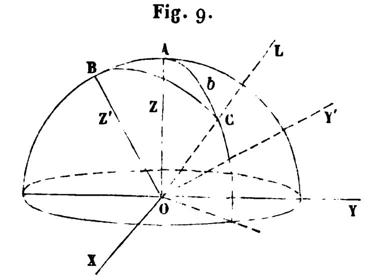
données; celles du point C seront

$$BC = a,$$
$$\text{angle dièdre } YBC = B.$$

Pour passer d'un système à l'autre, prenons comme intermédiaire les coordonnées rectilignes z, y, x de C, rapportées aux axes rectangulaires OZ, OY, OX; nous aurons

$$z = r\cos b,$$
$$y = r\sin b\cos A,$$
$$z = r\sin b\sin A.$$

Fig. 9.



Si l'on fait tourner ce dernier système d'un angle c autour de OX, nous aurons de même, en désignant par z', y', x' les nouvelles coordonnées de C,

$$z' = r\cos a,$$
$$y' = r\sin a\cos B,$$
$$x' = r\sin a\sin B.$$

Les formules de transformation, d'après ce qui précède, seront

$$z' = z\cos c - y\sin c,$$
$$y' = z\sin c + y\cos c,$$
$$x' = x,$$

ou bien, en revenant aux coordonnées sphériques et supprimant le facteur commun r,

$$\cos a = \cos c\cos b - \sin c\sin b\cos A,$$
$$\sin a\cos B = \sin c\cos b + \cos c\sin b\cos A,$$
$$\sin a\sin B = \sin b\sin A.$$

Appliquons immédiatement à nos coordonnées célestes ces

formules absolument générales, en identifiant OA avec la verticale OZ, OB avec la ligne des pôles. Il faudra remplacer

$$\begin{aligned} b &\text{ par } z,\\ A &\text{ par } A,\\ a &\text{ par } \delta,\\ B &\text{ par } Æ,\\ c &\text{ par } \lambda; \end{aligned}$$

nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \cos\delta &= \cos\lambda\cos z - \sin\lambda\sin z\cos A,\\ \sin\delta\cos Æ &= \sin\lambda\cos z + \cos\lambda\sin z\cos A,\\ \sin\delta\sin Æ &= \sin z\sin A. \end{aligned}$$

Pour les formules de transformation inverse, nous remplacerons dans les précédentes δ et Æ par z et A, et λ par $-\lambda$.

$$\begin{aligned} (a)\qquad \cos z &= \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos Æ,\\ (b)\qquad \sin z\cos A &= -\sin\lambda\cos\delta + \cos\lambda\sin\delta\cos Æ,\\ (c)\qquad \sin z\sin A &= \sin\delta\sin Æ. \end{aligned}$$

Ce sont celles dont nous aurons à faire un continuel usage. Elles contiennent d'ailleurs toute la Trigonométrie sphérique.

Pour déterminer les deux inconnues z et A, nous avons ici trois équations; elles ne sont donc pas absolument distinctes et doivent au fond se réduire à deux. En effet, en faisant la somme des carrés de (a) et de (b), on retombe sur le carré de (c). Mais elles sont nécessaires toutes les trois pour déterminer A sans ambiguïté. z étant compris entre 0° et 180°, $\sin z$ est positif; par conséquent, (b) et (c) donnent les signes de $\cos A$ et de $\sin A$. En appliquant ces formules sans autre soin que de se laisser guider par les signes, on ne sera jamais embarrassé. Nous ferons remarquer seulement que A et Æ sont toujours du même côté du méridien, soit à l'est, soit à l'ouest. Quand l'un est nul, l'autre est 0° ou 180°.

Procédés de calcul.

Ce qu'il y a de plus simple, c'est de calculer directement les seconds membres, sans s'astreindre à les transformer en pro-

duits. Exemple : $\lambda = 48°$, $\delta = 37°$, $\mathcal{H} = 70°$.

log cos λ....	9,82551	log sin λ	9,87107	1er nombre.	0,53439
log cos δ....	9,90235	log sin δ	9,77946	2e nombre.	0.15296
	9,72786	log cos Æ......	9,53405	cos z......	0,68735
			9,18458		

log sin λ....	9,87107	log cos λ.......	9,82551	1er nombre.	—0,59350
log cos δ....	9,90235	log sin δ cos Æ..	9,31351	2^e nombre.	0,13773
	9,77342		9,13902	sin z cos A..	—0,45577

log sin δ........	9,77946	
log sin Æ.......	9,97299	
log sin z sin A...	9,75245	
log sin z cos A...	9,65875 n	
log tang A......	0,09370 n	A = 128° 52′,0
log cos A.......	9,79762 n	
log sin z........	9,86113	
log cos z	9,83718	
log tang z......	0,02395	z = 46° 34′,7

On préfère souvent rendre, comme l'on dit, les formules calculables par logarithmes en introduisant un angle auxiliaire. Posons

$$\cos\delta = m\cos\varphi, \quad \sin\delta\cos\mathcal{H} = m\sin\varphi;$$

les équations (a), (b), (c) deviendront

$$\begin{aligned} \cos z &= m\cos(\varphi-\lambda), \\ \sin z\cos A &= m\sin(\varphi-\lambda), \\ \sin z\sin A &= \sin\delta\sin\mathcal{H}, \end{aligned}$$

φ étant donné par

$$\tang\varphi = \tang\delta\cos\mathcal{H},$$

sans ambiguïté, si l'on convient de prendre m positif.

log tang δ ...	9,87711	log cos δ.....	9,90235
log cos Æ....	9,53405	log cos φ.....	9,98604
log tang φ ...	9,41116	log m........	9,91631
φ..........	14° 27′,1		
λ	48		
φ − λ.......	—33° 32′,9		

$\log m$........	9,91631	$\log m$.......	9,91631	$\log\sin\delta$	9,77946
$\log\cos(\varphi-\lambda)$.	9,92087	$\log\sin(\varphi-\lambda)$.	9,74244*n*	$\log\sin Æ$.....	9,97299
$\log\cos z$.....	9,83718	$\log\sin z\cos A$.	9,65875*n*	$\log\sin z\sin A$.	9,75245
$\log\sin z$.....	9,86113	$\log\cos A$.....	9,79762*n*		9,65875*n*
$\log\tan z$....	0,02395	$\log\sin z$......	9,86113	$\log\tan A$....	0,09370*n*
z...........	46° 34′,7			A...........	128° 52′,0

Ces calculs se simplifient beaucoup lorsqu'on sait d'avance dans quel quadrant A doit être pris et qu'on dispose d'une Table de sinus verses et de leurs logarithmes. Désignant ces sinus verses par σ, on a

$$\sigma a = 1 - \cos a = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} a.$$

La formule (a) peut s'écrire ainsi :

$$\cos z = \cos(\delta - \lambda) - 2\sin\lambda\sin\delta\sin^2 \tfrac{1}{2} Æ.$$

En la retranchant membre à membre de l'identité $1 = 1$, on aura

$$\sigma z = \sigma(\delta - \lambda) + \sin\lambda\sin\delta\,\sigma Æ.$$

Dès lors, voici le calcul de l'exemple précédent, où $\delta - \lambda = -11°$:

$\sigma(\delta-\lambda)$....	0,01837	$\log\sin\lambda$.....	9,87107
2e terme....	0,29427	$\log\sin\delta$....	9,77946
σz.........	0,31264	$\log\sigma Æ$.....	9,81821
z..........	46° 34′,7	log 2e terme.	9,46874
		$\log\sin\delta$....	9,77946
		$\log\sin Æ$....	9,97299
		C^t^ $\log\sin z$...	0,13887
A = 180° − 51° 8′,0		$\log\sin A$....	9,89132

CHAPITRE III.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Nous rappellerons d'abord une série de formules usuelles de Trigonométrie :

Formules relatives à un arc.

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1,$$
$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a,$$
$$2\sin a \cos a = \sin 2a,$$
$$1 - \cos a = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}a,$$
$$1 + \cos a = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}a,$$
$$\sin(90° + a) = \sin(90° - a),$$
$$\operatorname{tang}(45° + a) = \cot(45° - a),$$
$$\cos(m-1)a - \cos(m+1)a = 2\sin a \sin ma.$$

Formules relatives à deux arcs.

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a,$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b,$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$
$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2},$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2},$$
$$\frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} = \frac{\operatorname{tang}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}},$$
$$\sin(a-b)\sin(a+b) = \sin^2 a - \sin^2 b.$$

Séries trigonométriques.

$$\sin x = x - \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}x^5 - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1.2.3.4}x^4 - \ldots,$$

$$\tang x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots.$$

Dans le second membre, x doit être exprimé, comme $\sin x$ et $\cos x$ dans le premier, en parties du rayon et non en parties de la circonférence.

La Trigonométrie sphérique a pour but de résoudre les triangles sphériques. Ceux-ci comprennent trois côtés ou arcs a, b, c et les angles dièdres opposés A, B, C. Les arcs ou les angles doivent être compris entre 0° et 180°. Un côté quelconque doit être plus petit que la somme des deux autres; la somme des trois côtés doit être moindre que 360°, et celle des trois angles doit être comprise entre deux droits et six droits, ou entre 180° et 540°. Étant donnés trois quelconques de ces six éléments, on déduit les trois autres de certaines relations que nous allons obtenir entre quatre quelconques d'entre eux.

Toutes ces relations se tirent immédiatement des formules de transformation des coordonnées. Celles-ci sont beaucoup plus générales, car elles échappent aux restrictions que nous venons d'indiquer.

La figure relative à ces formules montre en effet que les coordonnées a, b, B et l'arc c sont les éléments d'un triangle sphérique ABC. Le seul angle A fait exception; il n'appartient pas à ce triangle, mais il est le supplément de son angle BAC. En outre, les angles A et B, considérés comme coordonnées sphériques, peuvent varier de 0° à 360°, tandis que, pris comme éléments d'un triangle, ils doivent rester compris entre 0° et 180°. Admettant cette restriction et remplaçant dans les formules (a), (b), (c) l'angle A par son supplément, on aura, pour

le triangle ABC, les équations

$$(1) \qquad \cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A,$$
$$(2) \qquad \sin a \cos B = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A,$$
$$(3) \qquad \sin a \sin B = \sin b \sin A.$$

Elles comprennent toute la Trigonométrie, et nous en déduirons toutes les autres.

En divisant (2) par (3), on a l'équation nouvelle

$$(4) \qquad \sin A \cot B = \sin c \cot b - \cos c \cos A.$$

A tout triangle sphérique ABC répond un triangle A′B′C′ dont les angles dièdres ont pour suppléments les côtés a, b, c du premier et dont les côtés a', b', c' sont les suppléments des angles A, B, C. Nous aurons les équations de ce triangle supplémentaire en remplaçant dans (1), (2) les grandes lettres par les petites, et réciproquement, et en changeant les cosinus de signe. Cela donne les nouvelles relations

$$(5) \qquad \cos A = -\cos C \cos B + \sin C \sin B \cos a,$$
$$(6) \qquad \sin A \cos b = \sin C \cos B + \cos C \sin B \cos a.$$

Quant aux analogies des sinus et aux équations (4), elles n'éprouvent aucun changement par cette substitution. En divisant (6) par (3), on retrouve la forme (4) :

$$\sin a \cot b = \sin C \cot B + \cos C \cos a.$$

Les équations (2) et (6) ne peuvent servir à la résolution des triangles, parce qu'elles contiennent chacune cinq éléments du triangle au lieu de quatre, mais elles se prêtent à d'utiles transformations.

Par simple permutation des lettres a, b, c, A, B, C dans les six types de (1) à (6), on déduit six groupes de relations que nous allons écrire :

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \end{cases}$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A,\\
\sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A,\\
\sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B,\\
\sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B,\\
\sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C,\\
\sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C,
\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\sin a \sin B &= \sin b \sin A,\\
\sin a \sin C &= \sin c \sin A,\\
\sin b \sin C &= \sin c \sin B,
\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\sin A \cot B &= \cot b \sin c - \cos c \cos A,\\
\sin A \cot C &= \cot c \sin b - \cos b \cos A,\\
\sin B \cot A &= \cot a \sin c - \cos c \cos B,\\
\sin B \cot C &= \cot c \sin a - \cos a \cos B,\\
\sin C \cot A &= \cot a \sin b - \cos b \cos C,\\
\sin C \cot B &= \cot b \sin a - \cos a \cos C,
\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,\\
\cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,\\
\cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,
\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a,\\
\sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a,\\
\sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b,\\
\sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b,\\
\sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c,\\
\sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c.
\end{aligned}\right.$$

On rend aisément calculables par logarithmes les équations des groupes (1) et (5). Prenons par exemple

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A;$$

on en tire

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

et par suite

$$1 - \cos A = \frac{-\cos a + \cos(b - c)}{\sin b \sin c},$$

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \sin c},$$

qui se réduisent, en posant $a + b + c = 2s$, à

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin(s - a)\sin s}{\sin b \sin c}.$$

En divisant membre à membre, il vient

$$\tang^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin(s - a)\sin s}.$$

De là les trois groupes fort utiles

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin b \sin c}}, \\ \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s - a)\sin(s - c)}{\sin a \sin c}}, \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s - a)\sin(s - b)}{\sin a \sin b}}, \\ \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s - a)\sin s}{\sin b \sin c}}, \\ \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s - b)\sin s}{\sin a \sin c}}, \\ \cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s - c)\sin s}{\sin a \sin b}}, \end{aligned} \right.$$

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \tang \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin(s - a)\sin s}}, \\ \tang \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s - a)\sin(s - c)}{\sin(s - b)\sin s}}, \\ \tang \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s - a)\sin(s - b)}{\sin(s - c)\sin s}}. \end{aligned} \right.$$

De même, pour le groupe (5), en posant $A+B+C=2S$ [1],

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}},\\ \operatorname{tang}\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}},\\ \operatorname{tang}\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}}. \end{aligned}\right.$$

Comme les angles et les arcs n'atteignent pas 180° dans un triangle, leurs moitiés n'atteignent pas 90° et leurs lignes trigonométriques sont toutes positives; on a donc supprimé le signe — devant les radicaux.

Analogies de Delambre et de Neper.

Écrivons ici les deux premières analogies des sinus [2],

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A,$$
$$\sin a \sin C = \sin c \sin A,$$

Combinons-les par addition et soustraction en remplaçant les sommes ou les différences de sinus par des produits; nous aurons

$$(10)\quad \sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2},$$

$$(11)\quad \sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{b+c}{2}.$$

---

(1) En posant $A+B+C-180^\circ = 2E =$ excès sphérique, on a, pour le groupe (9), la forme

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin E\sin(A-E)}{\sin B\sin C}},\qquad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B-E)\sin(C-E)}{\sin B\sin C}},$$

et par conséquent

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin E\sin(A-E)}{\sin(B-E)\sin(C-E)}}.$$

(2) *Analogie* signifiait autrefois *proportion*. Ce terme n'est plus guère employé qu'en Trigonométrie.

Ces équations, décomposées en facteurs, donnent immédiatement les analogies de Delambre :

$$(12)\qquad \sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2},$$

$$(13)\qquad \cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2},$$

$$(14)\qquad \sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2} = \cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2},$$

$$(15)\qquad \cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2}.$$

Les analogies (12) et (13), multipliées membre à membre, reproduisent (10); (14) et (15) reproduisent de même (11). Pour montrer la légitimité de cette décomposition en facteurs de l'équation (10) ou pour vérifier l'équation (12), par exemple, remplaçons-y les sinus et cosinus des angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ par leurs expressions en fonction des côtés; si l'équation (12) est juste, elle devra se trouver par là réduite à une identité. Or elle devient, après cette substitution,

$$\sin\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\sin^2 s\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin^2 a\sin b\sin c}} + \sin\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\sin^2(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin^2 a\sin b\sin c}}$$
$$= \sin\frac{b+c}{2}\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}},$$

équation qui se réduit, par la suppression des facteurs communs aux deux membres, à

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin a}[\sin s + \sin(s-a)] = \sin\frac{b+c}{2},$$

ou à l'identité

$$\sin\left(s-\frac{a}{2}\right) = \sin\frac{b+c}{2}.$$

Les analogies de Delambre ne peuvent servir à la résolution des triangles, puisque chacune d'elles en contient les six éléments; mais, en les divisant deux à deux, on obtient les analo-

gies de Neper

(16) $$\operatorname{tang}\frac{B+C}{2}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}\cot\frac{A}{2},$$

(17) $$\operatorname{tang}\frac{B-C}{2}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\cot\frac{A}{2},$$

(18) $$\operatorname{tang}\frac{b+c}{2}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}\operatorname{tang}\frac{a}{2},$$

(19) $$\operatorname{tang}\frac{b-c}{2}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}\operatorname{tang}\frac{a}{2}.$$

Inutile d'écrire les formules analogues qui en résultent par la permutation des lettres.

Triangles rectangles.

Il suffit de faire $A = 90°$ dans les trois formules fondamentales. Elles deviennent

(4) $$\cos a = \cos c \cos b,$$

(5) $$\sin a \cos B = \sin c \cos b,$$

(6) $$\sin a \sin B = \sin b.$$

En divisant (5) par (4) il vient

(7) $$\operatorname{tang} a \cos B = \operatorname{tang} c,$$

et, par permutation,

(8) $$\operatorname{tang} a \cos C = \operatorname{tang} b.$$

En divisant (6) par (5) on a

(9) $$\sin c \operatorname{tang} B = \operatorname{tang} b,$$

et, par permutation,

(10) $$\sin b \operatorname{tang} C = \operatorname{tang} c.$$

Multiplions membre à membre les relations (4), (9) et (10), on aura

$$(11) \qquad \tang B \tang C \cos a = 1.$$

Par permutation, (5) donne

$$\sin a \cos C = \sin b \cos c.$$

En la divisant par (6) on aura

$$(12) \qquad \cos C = \sin B \cos c,$$

et, par permutation,

$$(13) \qquad \cos B = \sin C \cos b.$$

A titre de moyen mnémonique, posons

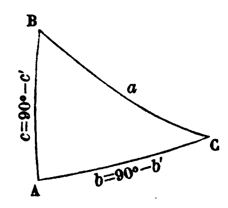
$$b = 90 - b', \quad c = 90 - c'.$$

Ces diverses équations pourront s'écrire ainsi :

$$\begin{array}{ll}
\cos a = \sin c' \sin b', & \cos a = \cot B \cot C, \\
\cos b' = \sin a \sin B, & \cos b' = \cot c' \cot C, \\
\cos c' = \sin a \sin C, & \cos c' = \cot b' \cot B, \\
\cos B = \sin b' \sin C, & \cos B = \cot a \cot C, \\
\cos C = \sin c' \sin B, & \cos C = \cot a \cot B.
\end{array}$$

Si l'on considère l'ordre dans lequel se suivent les cinq quantités b', c', B, a, C lorsqu'on tourne autour de la figure (en ne

Fig. 10.



tenant pas compte de l'angle droit A), on voit que le cosinus de l'une d'elles est égal au produit des cotangentes des deux éléments adjacents ou au produit des sinus des deux éléments non adjacents.

Résolution des triangles sphériques.

On peut donner :

1° Les trois côtés;

2° Les trois angles;

3° Deux côtés et l'angle compris;

4° Deux angles et le côté commun;

5° Deux côtés et l'angle opposé à l'un deux;

6° Deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Les deux premiers cas sont tout résolus par les groupes (1) et (5) ou, si l'on tient à des formules calculables par logarithmes, par les formules (8) et (9). Les deux cas suivants se ramènent aux premiers par les formules (1) ou (5). Enfin les deux derniers se ramènent aux précédents par les formules (3), c'est-à-dire par les analogies de sinus.

Il est plus avantageux d'appliquer les analogies de Neper aux quatre derniers cas. Si, par exemple, les données sont b, c, A, on calculera B et C par les analogies (16) et (17), puis a par l'analogie (18). Si les données sont b, c, B, on obtient C par une analogie de sinus et A par une des analogies de Neper.

Les quatre premiers cas ne donnent lieu à aucune discussion. Avec trois arcs ou trois angles pris au hasard (sous les restrictions indiquées au début de ce Chapitre), on n'aura ni valeurs imaginaires ni solutions multiples. Il en est autrement des deux derniers cas. Là intervient l'analogie des quatre sinus; par conséquent, un des éléments cherchés ne se trouve déterminé que par cette ligne trigonométrique. Or à un sinus répondent toujours deux arcs supplémentaires plus petits chacun que 180°. Supposons, pour fixer les idées, les données a, b et B. Le triangle sera impossible si l'analogie calculée fournit pour $\sin A$ un nombre plus grand que l'unité. Dans le cas contraire, il y aura deux valeurs pour A, et alors il faudra examiner si elles cadrent toutes deux avec les données. En effet, dans tout triangle, de deux côtés le plus grand doit être opposé au plus grand angle. Il en résulte que $B - A$ doit être de même signe que $b - a$. Si les deux valeurs trouvées pour A satisfont

à cette condition, il y aura deux solutions, autrement il n'y en aura qu'une.

C'est d'ailleurs ce que l'on voit de suite par une construction graphique. Soit B l'angle donné; sur un de ses côtés, portons l'arc a en BC et du point C comme centre décrivons sur la sphère une circonférence. Si elle ne rencontre pas le côté indéfini BA, il n'y aura pas de solution. C'est le cas où b est plus petit que la perpendiculaire CP. Si elle rencontre le côté BA en deux points A et A′ du même côté de B, il y aura deux solutions, savoir les triangles CBA, CBA′. Si cette même circonférence coupe BA en deux points situés de part et d'autre de B (c'est le cas où $b > a$), il n'y aura qu'une solution.

Ces circonstances ne tiennent donc pas du tout à l'emploi d'une analogie de sinus : on les retrouverait en prenant d'autres formules. Nous pourrions, par exemple, calculer c par une des équations (1),

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$

en posant

$$\cos a = m \cos\varphi,$$
$$\sin a \cos B = m \sin\varphi,$$

ce qui la transforme en

$$\cos b = m \cos(\varphi - c).$$

Mais, comme c s'obtient alors par un cosinus, il y a encore deux solutions en général, non qu'il y ait deux angles admissibles pour $\cos(\varphi - c)$, mais parce que la formule précédente s'écrit indifféremment par $\varphi - c$ ou $c - \varphi$. Si par le $\cos(\varphi - c)$ tiré de cette équation les Tables donnent 25°, on aura pour c deux valeurs qui différeront entre elles de 50°.

Le cas que nous venons d'examiner se présente dans la pratique de la navigation lorsqu'il s'agit de déterminer la colatitude par la mesure de la distance zénithale d'un astre connu, ou bien encore dans le problème de Douwes. Mais il n'y a jamais lieu d'hésiter entre les deux solutions que le calcul présente, car l'observateur a toujours d'avance, par l'estime, une valeur approchée de l'élément cherché.

Degré de précision des calculs.

Il dépend du nombre des chiffres décimaux de la Table que l'on emploie. Le dernier chiffre de chaque nombre pris dans la Table est affecté d'une erreur comprise entre zéro et une demi-unité du dernier ordre décimal. Dans ces limites, toutes les erreurs sont également probables. Ces erreurs sont indifférem-ment en plus ou en moins. Il résulte de là cette conséquence importante que, si l'on combine par voie d'addition ou de soustraction un certain nombre de logarithmes pris dans la Table, leurs erreurs se compenseront en grande partie. Sans doute il n'est pas impossible, en thèse absolue, qu'elles se rencontrent toutes de même sens et de grandeur maximum, en sorte que la somme de vingt logarithmes, par exemple, soit en erreur de près de dix unités du dernier ordre décimal, mais on prouve, par le Calcul des probabilités, que celle d'une telle accumulation d'erreurs est extrêmement faible ; il y a

2 432 900 000 000 000 000

à parier contre un qu'elle ne se produira pas ([1]). Ainsi, bien que les erreurs petites ou grandes (toujours inférieures à 0,5) aient même probabilité quand il s'agit d'un logarithme isolé pris dans la Table, les petites erreurs sont bien plus probables que les grandes quand il s'agit d'un calcul basé sur l'emploi de plusieurs de ces logarithmes.

A la vérité, l'erreur propre de l'interpolation s'ajoute à l'erreur des Tables et fait varier celle-ci entre zéro et 1. Elle double ainsi l'erreur à craindre sur le résultat final. On peut néanmoins évaluer à ± 2 unités, en moyenne, l'erreur à craindre par l'emploi d'une dizaine de logarithmes, ce qui répond aux calculs usuels de Trigonométrie et de transformation des coordonnées.

Pour apprécier l'effet d'une erreur de deux unités du dernier ordre sur l'angle conclu d'un logarithme de sinus, il suffit d'exa-

---

([1]) Introduction aux Tables de Bremiker, p. 59.

miner dans la Table les différences qui servent à l'interpolation. Pour log sin 1°, par exemple, la différence est 717 dans les Tables à cinq décimales ; une erreur de deux unités sur ce logarithme produira donc une erreur de $\frac{2}{717}$ de minute. Les différences vont en diminuant à mesure que l'arc augmente ; à 45°, l'erreur sera de $\frac{2}{13}$ de minute ; à 80°, elle atteint 1′ entière ; elle ira à 5′ ou 6′ vers 89°. Ainsi le sinus d'un angle, excellent pour déterminer cet angle quand il est de médiocre grandeur, ne vaut plus rien quand cet angle est voisin de 90°.

Il en est de même, mais en sens inverse, du cosinus. Seule la tangente est partout avantageuse. Elle vaut tout autant que le sinus quand l'angle est voisin de 0°, tout autant que le cosinus quand il est voisin de 90° ; elle donne deux fois plus de précision que le sinus ou le cosinus dans l'endroit le plus défavorable de la Table, c'est-à-dire à 45°, où les différences des logarithmes des tangentes atteignent leur minimum. En cet endroit, en effet, une erreur de deux unités sur le logarithme d'une tangente produit une erreur de $\frac{2'}{26}$ sur l'angle conclu, tandis qu'elle serait de $\frac{2'}{13}$ par le sinus ou le cosinus.

Les formules qui donnent l'arc cherché par sa tangente sont donc les meilleures ; aussi s'attache-t-on à modifier en ce sens celles qui aboutissent à des sinus ou des cosinus, lorsque cela est possible. Nous avons vu que les formules de transformation des coordonnées aboutissent à des tangentes. Tels sont aussi les groupes de formules (4), (7), (8) et (9) des triangles sphériques. Pour en donner un autre exemple, supposons que l'on ait à calculer la coordonnée $\mathit{Æ}$ par l'équation

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos \mathit{Æ} ;$$

on remplacera successivement $\cos \mathit{Æ}$ par $1 - 2\sin^2 \frac{\mathit{Æ}}{2}$ et $2\cos^2 \frac{\mathit{Æ}}{2} - 1$, puis on divisera membre à membre, ce qui donnera

$$\tan \frac{\mathit{Æ}}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cos z - \cos(\delta - \lambda)}{\cos z - \cos(\delta + \lambda)}}.$$

Ici nous laissons le double signe, parce que la coordonnée Æ varie de 0° à 360°. On prend le signe — quand on sait d'avance que Æ est dans le troisième ou le quatrième quadrant.

Choix des Tables.

Quant au choix des Tables, il dépend du degré de précision que l'on a en vue. En Astronomie ou en Géodésie on tient compte des dixièmes de seconde; la variation du logarithme de tangente étant au minimum de quarante-deux unités pour 1″ dans les Tables à sept décimales, une erreur de deux unités du dernier ordre sur le logarithme trouvé peut produire $\frac{2''}{42}$ ou 0″,05 d'erreur sur l'arc conclu. On aura donc recours à ces Tables, et quelquefois à des Tables encore plus étendues. Pour les calculs nautiques, où l'erreur probable des meilleures observations dépasse certainement 0′,1, on se contentera des Tables à cinq décimales, qui, dans les cas les plus défavorables, ne donnent lieu, toujours pour deux unités d'erreur sur le logarithme, qu'à $\frac{2}{25} = 0',08$ d'erreur sur l'angle conclu. Si l'on ne tient pas aux 8′ ou 10′, on se contentera de trois décimales. Il va sans dire que les calculs sont d'autant plus rapides que l'on y emploie moins de chiffres.

Dans certains cas (les distances lunaires), nous aurons néanmoins recours aux Tables à sept décimales. Celles de Bagay, de seconde en seconde, dispensent de toute interpolation.

Habitude du calcul.

Cette habitude est facile à prendre. L'essentiel est de procéder avec ordre; autrement on fait des fautes et l'on se décourage. Il faut diviser le travail. On commence invariablement par dresser le Tableau des calculs. Soit, par exemple, la formule de triangle quelconque

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}.$$

On dispose les différentes opérations de la manière suivante :

a	$\log \sin(s-b)$
b	$\log \sin(s-c)$
c	$C^t \log \sin s$
$2s$	$C^t \log \sin(s-a)$
s	$\log \operatorname{tang}^2 \frac{A}{2}$
$s-a$	
$s-b$	$\log \operatorname{tang} \frac{A}{2}$
$s-c$	
Vérif. somme $= s$	$\frac{A}{2}$
	A

Cela fait, il ne reste plus qu'à y porter les données et à prendre les Tables en main, sans se préoccuper d'autre chose que de ne pas commettre d'erreur de transcription. En général, il faut vérifier chaque addition ou soustraction en recommençant l'opération en ordre inverse, surtout lorsque l'on est resté quelque temps sans calculer.

Une dernière recommandation, c'est d'acquérir l'habitude de prendre les logarithmes dans la Table sans y regarder à deux fois. Soit, par exemple, le logarithme tabulaire de 3737,7, c'est-à-dire 3,53627. On le lit en trois parties :

trois... cinq cent trente-six... vingt-sept.

Quand il a été ainsi énoncé mentalement, on le retient fort bien ; on ferme la Table et on l'inscrit. De même pour le logarithme à sept décimales de 206265 ou 5,3144251 ; on lit

cinq... trois cent quatorze... quarante-deux... cinquante et un.

et il reste dans la tête assez longtemps pour qu'on le transcrive sans avoir besoin de reconsulter la Table. Quant aux compléments, rien de plus facile que de les lire à vue dans les Tables, sans calcul séparé.

Les petites Tables de Lalande, à cinq décimales, suffisent à tous les calculs nautiques, sauf à celui des équations (1) et (2) du Chapitre des distances lunaires. Nous n'en emploierons

pas d'autres. On prendra de tête, le plus souvent, les parties proportionnelles. Cependant il est parfois plus commode de recourir aux grandes Tables, tout en calculant à cinq décimales, afin de supprimer toute interpolation.

Réduction en séries des formules trigonométriques.

Lorsqu'une formule contient de petits arcs, on trouve avantageux de la développer en série suivant les puissances ascendantes de ces petits arcs, parce qu'alors il est permis de réduire la série ainsi obtenue aux deux ou trois premiers termes, suivant les cas. Bien que nous ne devions faire qu'un usage fort restreint de ces développements, nous indiquerons la marche que l'on suit en général pour les obtenir et les précautions à prendre pour les utiliser.

Une fonction quelconque $y=f(x)$ de la variable x peut être développée en série suivant les puissances ascendantes de x. En désignant par $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... les dérivées successives de cette fonction, et par $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ... les valeurs que prennent cette fonction et ses dérivées quand on y fait $x=0$, on a

$$y=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{2.3}f'''(0)+\ldots,$$

pourvu que cette fonction et ses dérivées restent continues entre zéro et x, et que la série elle-même soit convergente. Par exemple, l'équation

$$\tang p=\frac{\sin P\sin z}{1-\sin P\cos z},$$

relative aux triangles rectilignes (elle figure plus loin au Chapitre des parallaxes), contient un terme très-petit, $\sin P$. Pour développer p en série selon les puissances ascendantes de $\sin P$, posons $\sin P=x$ et écrivons

$$p=\text{arc tang}\,\frac{x\sin z}{1-x\cos z}.$$

La dérivée première de p par rapport à x sera

$$\frac{\sin z}{1 - 2x\cos z + x^2}.$$

On calculera de même les dérivées seconde, troisième, etc. Puis, faisant $x = 0$ dans la fonction et ses dérivées, on trouve successivement

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \sin z, \quad f''(0) = \sin 2z, \quad f'''(0) = 2\sin 3z, \quad \ldots;$$

par suite,

$$p = x\sin z + \frac{x^2}{2}\sin 2z + \frac{x^3}{3}\sin 3z + \ldots$$

ou

$$p = \sin P \sin z + \tfrac{1}{2}\sin^2 P \sin 2z + \tfrac{1}{3}\sin^3 P \sin 3z + \ldots.$$

Une autre manière de développer en série les formules trigonométriques consiste à y remplacer les sinus et cosinus des petits angles par les séries que nous avons rappelées au début de ce Chapitre, en s'arrêtant aux termes que l'on considère comme négligeables. Soit, par exemple, l'équation du triangle ABC, rectangle en A,

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B.$$

Si B est assez petit pour qu'on soit en droit de négliger $\frac{B^2}{2}$, on a, en remplaçant $\cos B$ par 1,

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a, \quad \text{d'où} \quad c = a.$$

Si $\frac{B^2}{2}$ est sensible, on écrira

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a\left(1 - \frac{B^2}{2}\right);$$

par suite,

$$\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} c = \frac{B^2}{2}\operatorname{tang} a.$$

Divisons le premier membre par $1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} c$ et le second membre par $1 + \operatorname{tang}^2 a$, qui n'en diffère pas sensiblement; on aura

$$\operatorname{tang}(a - c) \text{ ou } a - c = \frac{B^2}{2}\sin a \cos a = \frac{B^2}{4}\sin 2a,$$

aux termes près du quatrième ordre en B.

Les astronomes, qui font un usage assez fréquent de ce dé-

veloppement, l'expriment de la manière suivante :

$$c = a - \tang^2 \frac{B}{2} \sin 2a + \tfrac{1}{2} \tang^4 \frac{B}{2} \sin 4a - \tfrac{1}{3} \tang^6 \frac{B}{2} \sin 6a + \ldots.$$

Nous éviterons ces séries, d'abord parce qu'elles ne simplifient réellement pas le calcul dans les applications dont nous aurons à nous occuper, ensuite parce que la convergence qui en légitime l'emploi n'est pas toujours fort aisée à établir et peut même disparaître en certains cas, ce qui rend ces séries inapplicables.

C'est ici le lieu de faire une remarque très importante pour la pratique. Ces formules, où des arcs se trouvent mêlés à des lignes trigonométriques, supposent que ces arcs sont rapportés à la même unité que celles-ci, c'est-à-dire au rayon et non pas à la circonférence ou à ses subdivisions en degrés, minutes ou secondes. Si donc on veut y introduire les arcs évalués à la manière ordinaire, il faut faire subir une certaine modification à ces séries. Il y a, en effet, deux manières d'exprimer un arc : 1° en parties de la circonférence divisée en 360° ou en 21600′ ou 1296000″; 2° en parties décimales du rayon pris pour unité. Pour opérer la conversion, il faut savoir combien la deuxième unité, le rayon, vaut de degrés, de minutes ou de secondes. C'est ce que donne la relation $2\pi r = \text{circ.}$, ou

$$2\pi r = 1296000'' = 21600' = 360^\circ.$$

On en déduit

$$r = \frac{1296000''}{2\pi} = 206265'',$$

$$r = \frac{21600'}{2\pi} = 3437',7,$$

$$r = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ,296,$$

ou bien encore, pour la transformation inverse,

$$1'' = \frac{1}{206265} = 0,000004848\,14, \quad \text{le rayon étant } 1,$$

$$1' = \frac{1}{3437,7} = 0,000290888,$$

$$1^\circ = \frac{1}{57,3} = 0,0174533.$$

Si donc un arc est exprimé en secondes, on le divisera par 206 265″ pour l'exprimer en parties du rayon. Si au contraire cet arc est exprimé en parties du rayon, comme dans les formules précédentes, on le multipliera par 206 265″ pour l'obtenir en secondes.

Par exemple, dans la série qui donne p en termes procédant suivant les puissances ascendantes du sinus du petit angle P, il faut multiplier le second membre par 206 265″ si p doit être exprimé en secondes. Si l'on voulait profiter de la petitesse de l'angle P pour remplacer aussi son sinus par l'arc et écrire

$$p = \mathrm{P} \sin z + \tfrac{1}{2}\mathrm{P}^2 \sin 2z,$$

formule qui n'a besoin d'aucune modification tant que p et P sont exprimés en parties du rayon, il faudrait, pour employer p et P en secondes, écrire

$$\frac{p}{206265} = \frac{\mathrm{P}}{206265} \sin z + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{P}}{206265}\right)^2 \sin 2z,$$

d'où

$$p = \mathrm{P} \sin z + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{P}^2}{206265} \sin 2z.$$

De même enfin, si c, a et le petit angle B sont donnés en secondes dans la dernière série, il faudra l'écrire ainsi pour le calcul :

$$c = a - \frac{1}{206265}\,\frac{\mathrm{B}^2}{4} \sin 2a + \frac{1}{(206265)^3}\,\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{B}^4}{16} \sin 4a + \ldots.$$

Dans le cas où la minute serait prise pour unité, le facteur de conversion serait 3438′ au lieu de 206265″.

Comme l'arc de 1″, c'est-à-dire $\frac{1}{206265}$, est sensiblement égal à son sinus, on écrit souvent ce facteur sous la forme sin 1″. Aussi trouve-t-on souvent dans les livres ces séries préparées pour le calcul sous la forme

$$c = a - \sin 1''\,\frac{\mathrm{B}^2}{4} \sin 2a + \tfrac{1}{2} \sin^3 1''\,\frac{\mathrm{B}^4}{16} \sin 4a + \ldots,$$

les angles c, a, B étant exprimés en parties de la circonférence.

Influence des erreurs d'observation.

C'est ici une question capitale dont le mathématicien ne se préoccupe pas. A l'aide des formules précédentes et de Tables d'une étendue convenable, le mathématicien résout un triangle, sur trois données quelconques, avec le degré d'exactitude qu'on lui assignera; en d'autres termes, si on lui demande les éléments inconnus à 5″ près, il emploiera des Tables à cinq décimales; si on les veut à 0″,05 près, il prendra les Tables à sept décimales; si on lui demande une exactitude encore plus grande, comme on le fait parfois en Géodésie, il aura recours aux Tables à huit ou neuf décimales.

La question est donc épuisée pour lui, et l'on s'en tient là effectivement dans les Livres d'Algèbre ou de Géométrie. Mais la pratique introduit ici une question tout autre, celle d'apprécier l'effet que les erreurs d'observation dont les données sont affectées produisent sur le résultat.

Soit F une fonction continue de quantités x, y, susceptibles de variations grandes ou petites. Si x augmente de h, y de i, la fonction augmente de

$$\begin{aligned} &hF'_x + \frac{h^2}{2}F''_x + \ldots \\ &+ iF'_y + hi\,F''_{xy} + \ldots \\ &\qquad + \frac{i^2}{2}F''_y + \ldots, \end{aligned}$$

F'_x, F'_y, F''_x, ... représentant les dérivées successives de F par rapport aux variables mises en indice. Si h et i sont les erreurs de mesure qui affectent x et y, ces erreurs étant généralement fort petites, on est en droit de négliger leurs carrés et leurs produits; alors leur effet sur la fonction proposée se réduit sensiblement à

$$hF'_x + iF'_y.$$

On l'obtient donc en différentiant la fonction proposée par rapport aux quantités affectées d'erreur et en remplaçant dx, dy, dz, ... par les erreurs elles-mêmes.

Exemple. — Étant donnés deux côtés a, c et l'angle compris B, on en déduit b par l'équation

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B.$$

Si a, c, B sont affectés d'erreurs, celle qui en résultera sur b s'obtiendra en différentiant cette relation par rapport à toutes les quantités qu'elle contient; on aura donc

$$\begin{aligned} -\sin b\, db = &-(\sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B)\, da \\ &-(\cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B)\, dc \\ &- \sin a \sin c \sin B\, dB. \end{aligned}$$

Les équations des groupes (2) et (3) nous permettent de donner à cette relation la forme suivante :

$$db = \cos C\, da + \cos A\, dc + \sin c \sin A\, dB.$$

En opérant de même sur les autres équations trigonométriques, nous formerions des relations analogues pour exprimer l'erreur d'un élément quelconque en fonction des erreurs des trois autres; nous les donnerons au fur et à mesure des besoins.

Mais ces relations différentielles ne nous permettent de calculer l'effet produit sur un élément que lorsque les erreurs des données sont connues en grandeur et en signe. Tel n'est pas le cas dans la pratique; on n'y possède, en réalité, qu'une idée assez nette de l'ordre de grandeur des erreurs à craindre sur les mesures, mais on ne sait rien du signe ni de la valeur actuelle des erreurs réellement commises.

On verra, par la théorie des erreurs, que l'on est conduit alors à faire la somme des carrés des termes qui représentent ces erreurs et à écrire, quand on donne aux différentielles da, db, dc, dB la signification tout à fait pratique d'erreurs probables,

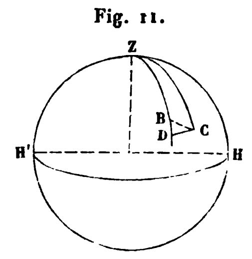
$$db = \pm\sqrt{(\cos C\, da)^2 + (\cos A\, dc)^2 + (\sin c \sin A\, dB)^2}.$$

On entrevoit déjà cette conséquence, insignifiante en théorie, mais capitale en pratique, que, pour obtenir b avec le plus d'exactitude possible, à l'aide d'éléments a, c, B observés ou

mesurés, il faut choisir les circonstances où le triangle ABC donnera, pour les coefficients $\cos C$, $\cos A$, $\sin c \sin A$, les plus petites valeurs possibles. De là une discussion spéciale qui reviendra à chaque pas dans la partie pratique de cet Ouvrage.

Ici se place une remarque, dont on aura souvent occasion de tenir compte dans la suite, sur la différence qui existe entre les petites variations des coordonnées, suivant qu'il s'agit des distances au pôle de ces coordonnées, telles que z, δ, ..., ou des angles dièdres A, Æ, ... Pour fixer les idées, supposons qu'un point C soit obtenu sur la sphère par ses coordonnées z

Fig. 11.



et A, et que le véritable point soit en B avec les coordonnées $z + dz$ et $A + dA$. Pour avoir le petit écart de ces deux points, il faut mener par C un arc de grand cercle CD perpendiculaire à ZD, puis écrire, en considérant le petit triangle BCD comme plan,

$$CB = \sqrt{\overline{DB}^2 + \overline{CD}^2}.$$

Or, par le triangle sphérique DZC dont l'angle en Z est dA, on a

$$\frac{\sin DC}{\sin dA} = \sin ZC \quad \text{ou} \quad DC = dA \sin z.$$

On aura donc finalement

$$CB = \sqrt{(dz)^2 + (dA \sin z)^2}.$$

Multiplier dA par $\sin z$ ou, dans un autre système de coordonnées, multiplier dÆ par $\sin \delta$, c'est exprimer l'écart angulaire du point en arc de grand cercle ; c'est le rendre comparable à dz dans le premier cas, à $d\delta$ dans le second.

Évidemment l'effet d'une petite variation dA de l'azimut d'un point dont la distance zénithale est z est beaucoup plus grand à l'horizon que dans les régions voisines du zénith, ce qui revient à remarquer que, dans le fuseau étroit dont l'angle est dA, l'écartement linéaire des grands cercles qui le comprennent va en diminuant de l'horizon au zénith.

CHAPITRE IV.

PARALLAXES.

Transformation des coordonnées par changement d'origine.

Jusqu'ici nous n'avons traité que des étoiles dont la distance est comme infinie par rapport aux dimensions de notre globe; pour ces astres-là, il est indifférent de faire passer l'axe du mouvement diurne apparent du ciel par le centre de la Terre ou par l'œil de l'observateur. Il n'en est plus de même pour les astres de notre système, le Soleil, les planètes, la Lune surtout, dont les distances à la Terre sont incomparablement moindres. Alors les lois du mouvement diurne ou les formules qui les représentent ne s'appliquent plus aux observations faites à la surface; il faudrait que l'observateur fût placé au centre même de la Terre pour que l'emploi de ces formules devînt légitime.

Au lieu de modifier les formules de transformation, ce qui entraînerait une grande complication, nous modifierons les observations elles-mêmes en leur appliquant les corrections nécessaires pour les ramener au centre de la Terre. Ce n'est, au fond, qu'un nouveau genre de transformation de coordonnées, non plus par changement de direction des axes, mais par changement d'origine. Cela suppose que les di-

mensions et la figure de notre globe sont bien connues. Nous exposerons donc tout d'abord l'état de la Science à ce sujet.

Figure et dimensions de la Terre.

La Terre est très sensiblement un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles. Il s'agit ici de la surface des mers idéalement prolongée par-dessous le relief des continents, surface générale de niveau qui jouit de la propriété d'être partout perpendiculaire à la direction du fil à plomb ou de la verticale. On croyait communément, au commencement de ce siècle, d'après le petit nombre de mesures que l'on possédait alors et qui ne méritaient pas toutes une grande confiance, que la Terre n'était qu'un sphéroïde aplati, à méridiens inégaux. Aujourd'hui la mesure de grands arcs de 20° à 25° en Angleterre et en France, aux Indes orientales et en Russie, jointe à plusieurs arcs plus petits, mais très bons, prouve que la surface mathématique de notre globe est bien un ellipsoïde de révolution, aux très petites quantités près dont on ne peut répondre dans ces admirables opérations géodésiques.

D'après les derniers calculs, basés sur l'ensemble des mesures actuelles, le demi grand axe de l'ellipse méridienne, ou le rayon équatorial, est

$$a = 6378284^{m} \text{ (erreur probable } \pm 58^{m}\text{)}.$$

En désignant le petit axe par b, l'aplatissement $\mu = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{294}$, avec une erreur probable d'une unité seulement sur le dénominateur.

Le carré de l'excentricité, double à peu près de μ, est

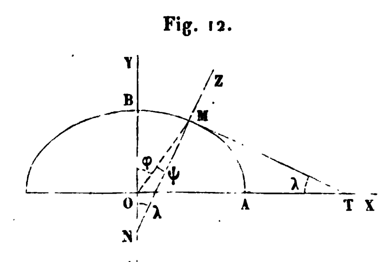
$$e^2 = 0,006785 \pm 0,000022.$$

L'aplatissement de notre globe ayant un effet sensible sur les observations de la Lune et jouant un certain rôle dans la réduction des distances lunaires, nous donnerons ici les formules dont on a besoin pour ces réductions.

La *fig.* 12 représente l'ellipse méridienne avec une grande

exagération d'aplatissement. On vient de voir, en effet, que la différence OA — OB des deux axes n'est que $\frac{1}{294}$ de OA; ce serait 1^{mm} seulement sur une figure où l'on donnerait à OA une longueur de 294^{mm}. L'ellipsoïde terrestre est engendré par

Fig. 12.



la rotation de cette ellipse autour du demi petit axe OB, ou axe polaire. Dans ce mouvement, le point A décrirait la circonférence de l'équateur. Rapportons cette ellipse, dont les demi-axes sont a et b, à un système de coordonnées rectangulaires OX et OY ; son équation sera

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

ou, en posant $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$,

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 = a^2(1 - e^2).$$

L'observateur placé en M à la surface du globe n'y peut mesurer que l'angle λ compris entre sa verticale MZ ou MN et l'axe polaire OB ou OY. Introduisons donc cette colatitude λ comme coordonnée courante.

En menant la tangente MT, on voit que MTO $= \lambda$; par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang}\lambda.$$

Or, en différentiant l'équation de l'ellipse, il vient

$$2y\,dy + 2(1 - e^2)x\,dx = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -(1 - e^2)\frac{x}{y};$$

donc

$$\tang\lambda = (1 - e^2)\frac{x}{y}.$$

Appelons N la grande normale MN au point dont les coordonnées sont x et y; nous aurons $x = \mathrm{N}\sin\lambda$, par suite, en tenant compte de la valeur de $\tang\lambda$, $y = \mathrm{N}(1 - e^2)\cos\lambda$.

Si l'on porte ces valeurs de x et de y dans l'équation de l'ellipse, on obtient, après quelques réductions faciles,

$$\mathrm{N} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\lambda}}.$$

Cette normale N est le rayon de courbure du globe terrestre transversalement au méridien en M. Le rayon de courbure dans le sens du méridien est

$$\mathrm{R} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

ou bien, en remplaçant b^4 par $a^4(1 - e^2)^2$, y^2 et x^2 par leurs valeurs en fonction de N,

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{N}^3}{a^2}(1 - e^2).$$

Nous aurons besoin, pour la réduction des observations de la Lune, des trois quantités MN ou N, ON et le rayon elliptique OM. Évidemment,

$$\mathrm{ON} = \mathrm{N}\cos\lambda - y = \mathrm{N}e^2\cos\lambda,$$

$$\mathrm{OM} = \sqrt{x^2 + y^2} = \mathrm{N}\sqrt{1 - (2e^2 - e^4)\cos^2\lambda}.$$

La Table suivante donne les valeurs de ces trois quantités de degré en degré de colatitude et en prenant a pour unité. Si l'on en voulait connaître la valeur en mètres, il suffirait de multiplier les nombres de la Table par celle de a, c'est-à-dire par 6 378 284^{m}.

Il n'est pas inutile de se faire une idée du très petit angle ψ qui est compris entre OM et MN, c'est-à-dire entre le rayon de la Terre et la verticale MN. Appelons ρ le rayon OM; le triangle

MON donnera

$$\rho \sin\psi = \qquad \text{ON} \sin\lambda = \text{N} e^2 \cos\lambda \sin\lambda,$$
$$\rho \cos\psi = \text{N} - \text{ON} \cos\lambda = \frac{a^2}{\text{N}}.$$

On en tire

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\text{N}^2}{a^2} e^2 \cos\lambda \sin\lambda.$$

Le maximum de ψ a lieu vers $\lambda = 45°$ à peu près. Calculant ψ pour cette valeur de λ, on aura

$$\psi = 3438' \frac{\frac{1}{2}e^2}{1 - \frac{1}{2}e^2} = 11',7.$$

Ainsi la verticale fait avec le rayon terrestre un très petit angle qui nulle part n'atteint $12'$.

Si l'on avait besoin de connaître l'angle $\text{MOB} = \varphi$ que le rayon terrestre fait avec l'axe polaire OB, angle qu'on nomme quelquefois *la colatitude géocentrique*, on aurait les relations

$$\rho \sin\varphi = x,$$
$$\rho \cos\varphi = y,$$

d'où

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{x}{y} = (1 - e^2)\,\text{tang}\lambda,$$
$$\rho^2 = \text{N}^2[1 - (2e^2 - e^4)\cos^2\lambda],$$

et enfin

$$\rho = \frac{a^2}{\text{N}},$$

en négligeant e^4.

Enfin il faut connaître la relation qui lie les deux quantités μ et e^2 par lesquelles on définit indifféremment la figure de notre ellipsoïde. Comme on a

$$\frac{a-b}{a} = \mu \quad \text{et} \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2,$$

on en tire

$$b = a(1 - \mu) \quad \text{et} \quad b^2 = a^2(1 - e^2),$$

par conséquent $(1 - \mu)^2 = 1 - e^2$, relation qui se réduit à

$2\mu = e^2$ quand on néglige le carré de μ; e est donc

$$\sqrt{\tfrac{2}{294}} = \sqrt{\tfrac{1}{147}} = \tfrac{1}{12}$$

à peu près.

La différence entre le rayon polaire et le rayon équatorial, c'est-à-dire $\frac{a}{294}$, est de 21677^{m}. Une quantité de cet ordre n'est pas à négliger quand il s'agit d'un astre aussi proche de nous que la Lune. Pour les autres astres du système solaire, l'effet serait insensible.

Dans tout ce qui va suivre, sauf la réduction des distances lunaires qui exige la connaissance exacte pour chaque lieu des grandeurs N, ON et OM, nous considérerons le globe terrestre comme une sphère dont le quart du méridien circulaire est de 10000000^{m} et dont le rayon est, par suite, de 6366197^{m} [1]. D'après cela, la longueur d'un degré est de 111111^{m} et celle de la minute d'arc de 1851^{m},9 en nombres ronds. Il est facile d'apprécier le degré d'exactitude de ces conventions. D'après les éléments de l'ellipsoïde terrestre donnés plus haut, on a en réalité 10001965^{m} ± 84^{m} pour le quart du méridien [2]. La différence, comme on voit, n'est que d'un mille. L'arc de 1′ pris sur un méridien est, pour l'ellipsoïde, $\frac{2\pi R}{21600} = \frac{R}{3437,7}$ et varie par conséquent avec la colatitude; de $\lambda = 30°$ à l'équateur, c'est-à-dire dans l'espace où l'on navigue sur l'un ou l'autre hémisphère, cet arc de 1′ varie de 1860^{m},9 à 1842^{m},9. La moyenne est identiquement le nombre constant que nous adoptons. Sur l'équateur, l'arc de 1′ est de 1855^{m},5. L'erreur serait ici de 3^{m},6 sur 1852^{m} et ne donnerait qu'un mille sur 514, en naviguant sur l'équateur. Nous verrons, du reste, comment on peut tenir compte de ces petites quantités dans la construction des Cartes marines.

---

(1) Conformément aux bases du système métrique.

(2) D'après les déterminations les plus récentes, dues au colonel Al. Clarke.

TABLE I.

Éléments de l'ellipsoïde terrestre.

λ.	MN (grande normale).	MO (rayon).	ON.	λ.	λ.	MN (grande normale).	MO (rayon).	ON.	λ.
30°	1,00255	0,99745	0,00589	150°	61°	1,00080	0,99920	0,00329	119°
31	1,00250	0,99751	0,00583	149	62	1,00075	0,99925	0,00319	118
32	1,00244	0,99756	0,00577	148	63	1,00070	0,99930	0,00308	117
33	1,00239	0,99761	0,00570	147	64	1,00065	0,99935	0,00297	116
34	1,00234	0,99766	0,00564	146	65	1,00061	0,99939	0,00287	115
35	1,00228	0,99772	0,00557	145	66	1,00056	0,99944	0,00276	114
36	1,00222	0,99778	0,00550	144	67	1,00052	0,99948	0,00265	113
37	1,00216	0,99784	0,00543	143	68	1,00048	0,99952	0,00254	112
38	1,00211	0,99789	0,00536	142	69	1,00044	0,99956	0,00243	111
39	1,00205	0,99795	0,00528	141	70	1,00040	0,99960	0,00232	110
40	1,00200	0,99801	0,00520	140	71	1,00036	0,99964	0,00221	109
41	1,00194	0,99806	0,00513	139	72	1,00032	0,99968	0,00210	108
42	1,00188	0,99812	0,00505	138	73	1,00029	0,99971	0,00198	107
43	1,00182	0,99818	0,00497	137	74	1,00026	0,99974	0,00187	106
44	1,00176	0,99824	0,00489	136	75	1,00023	0,99977	0,00176	105
45	1,00170	0,99830	0,00481	135	76	1,00020	0,99980	0,00164	104
46	1,00164	0,99836	0,00472	134	77	1,00017	0,99983	0,00153	103
47	1,00158	0,99842	0,00463	133	78	1,00015	0,99985	0,00141	102
48	1,00152	0,99848	0,00455	132	79	1,00012	0,99988	0,00130	101
49	1,00146	0,99854	0,00446	131	80	1,00010	0,99990	0,00118	100
50	1,00140	0,99860	0,00437	130	81	1,00008	0,99992	0,00106	99
51	1,00134	0,99866	0,00427	129	82	1,00007	0,99993	0,00094	98
52	1,00129	0,99871	0,00418	128	83	1,00005	0,99995	0,00083	97
53	1,00123	0,99877	0,00408	127	84	1,00004	0,99996	0,00071	96
54	1,00117	0,99883	0,00399	126	85	1,00003	0,99997	0,00059	95
55	1,00111	0,99889	0,00389	125	86	1,00002	0,99998	0,00047	94
56	1,00106	0,99894	0,00379	124	87	1,00001	0,99999	0,00036	93
57	1,00100	0,99900	0,00370	123	88	1,00000	1,00000	0,00024	92
58	1,00095	0,99905	0,00360	122	89	1,00000	1,00000	0,00012	91
59	1,00090	0,99910	0,00349	121	90	1,00000	1,00000	0,00000	90
60	1,00085	0,99915	0,00339	120					

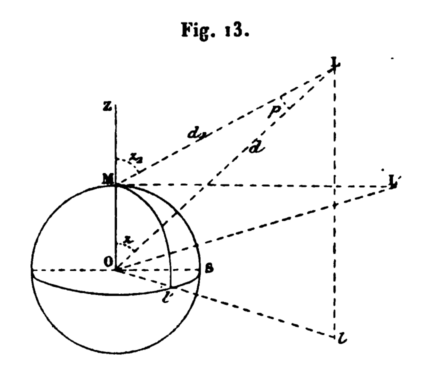
Théorie de la parallaxe dans l'hypothèse de la sphéricité de la Terre.

Soient (*fig.* 13) M la station de l'observateur; MZ la verticale qui, dans l'hypothèse admise, aboutit au centre O; L l'astre observé; z_1 sa distance zénithale ZML vue du point M; SMl' son

azimut A compté du méridien SMO; d_1 sa distance ML à l'observateur.

Les théories astronomiques et la *Connaissance des Temps,*

Fig. 13.



qui les résume pour chaque jour, nous font connaître, à l'instant de l'observation, sa distance d au centre de la Terre. Il nous reste à ramener à ce point les coordonnées zénithales mesurées en M, c'est-à-dire à déplacer l'origine des mesures angulaires de M en O, ou réciproquement.

D'abord il est bien facile de voir que la coordonnée dièdre A ne change pas lorsqu'on transporte l'origine de M en O sur l'axe même des coordonnées zénithales, car par cette transposition les lignes de visée ML, OL restent dans le même vertical ZOL. Ainsi, quand on considère la Terre comme une sphère, l'azimut de l'astre observé n'est pas affecté par le déplacement de l'origine des coordonnées de M en O.

Il n'en est pas de même de l'autre coordonnée zénithale ZML $= z_1$. Celle-là devient au centre ZOL $= z$; leur différence $z_1 - z$ est égale au petit angle MLO, que nous désignerons par p. Ce changement de direction porte le nom de *parallaxe*. La parallaxe n'affecte donc que la distance zénithale.

La distance de l'astre à l'observateur M est ML $= d_1$. Elle est plus faible que la distance au centre O que nous donne la *Connaissance des Temps,* et que nous désignerons par d. Quand la Lune passe près du zénith de l'observateur, la distance à l'astre est diminuée d'un rayon entier du globe ter-

restre. L'astre étant plus rapproché de l'observateur, son diamètre apparent Δ_1 est plus grand que pour le centre de la Terre, point pour lequel la *Connaissance des Temps* nous donne chaque jour le diamètre angulaire Δ.

La question est donc de déterminer z_1, d_1, Δ_1, connaissant z, d, Δ et la position de l'observateur sur le globe, ou bien de ramener au centre de la Terre le z_1 mesuré en A, c'est-à-dire de déterminer z. Elle se réduit évidemment à la résolution d'un triangle ordinaire MOL, tout comme la question de l'excentricité dans les cercles divisés. Voici les équations de ce problème, r étant le rayon OM de la Terre et r' celui de l'astre observé :

$$z_1 - z = p, \tag{1}$$

$$d \sin p = r \sin z_1, \tag{2}$$

$$d_1 \sin p = r \sin z, \tag{3}$$

$$d_1 \cos p = d - r \cos z, \tag{4}$$

$$\sin \Delta = \frac{r'}{d}, \tag{5}$$

$$\sin \Delta_1 = \frac{r'}{d_1}. \tag{6}$$

Si l'on met l'équation (2) sous la forme $\sin p = \frac{r}{d} \sin z_1$, on remarque que, pour $z_1 = 90°$, le changement (en grec, *parallaxis*) p prend une valeur maximum P et donne

$$\sin P = \frac{r}{d}. \tag{7}$$

L'astre est vu alors à l'horizon en L'; l'angle P prend le nom de *parallaxe horizontale :* c'est l'angle sous lequel un observateur placé au centre de cet astre verrait le rayon terrestre OM dirigé perpendiculairement au rayon visuel ML. La relation (7) reliant le rayon de la Terre à la distance, il suffit de connaître la parallaxe horizontale P d'un astre pour être en état d'en calculer la distance au centre de la Terre. Les astronomes remplacent donc cette distance par l'angle P : par exemple, pour le Soleil, $P = 8'',86$ en moyenne; pour la Lune, $P = 57' 2'',3$. On

en déduit, en prenant r pour unité :

Distance moyenne de la Terre au Soleil,

$$d = \frac{1}{\sin 8'',86} = \frac{206265''}{8'',86} = 23280;$$

Distance moyenne de la Terre à la Lune,

$$d = \frac{1}{\sin 57'2'',3} = \frac{206265''}{3422,3} = 60,273.$$

La *Connaissance des Temps* donne la valeur de P de cinq en cinq jours pour le Soleil, et à chaque heure de l'année pour la Lune.

De même les astronomes ne donnent pas le rayon linéaire des astres, mais leur demi-diamètre apparent pour la distance moyenne. Ainsi

le Soleil $\Delta = 16'2''$ pour $P = 8'',86$,
la Lune $\Delta = 15'34'',2$ pour $P = 57'2'',3$.

Le demi-diamètre apparent du Soleil varie de $\frac{1}{60}$ de sa valeur dans le cours d'une année; celui de la Lune varie de $\frac{1}{18}$ dans le cours d'une révolution de cet astre.

Cela posé, il est facile de résoudre les deux problèmes qui se rencontrent dans la question des parallaxes.

1° On a observé la distance zénithale z_1 de la station M : réduire cette distance zénithale au centre de la Terre, c'est-à-dire déterminer la distance zénithale géocentrique z. Les équations (1) et (2) donnent

$$(8) \qquad \sin p = \frac{r}{d}\sin z_1 = \sin P \sin z_1,$$
$$z = z_1 - p.$$

On aura la distance de l'astre au point M par la formule (3)

$$d_1 \sin p = r \sin z.$$

2° On a calculé la distance zénithale géocentrique z d'un astre pour un moment donné : en déduire la distance zénithale apparente z_1, telle qu'elle serait observée d'un point M de la

surface de la Terre. Les équations (3) et (4) donnent

$$(9)\qquad \operatorname{tang} p = \frac{r \sin z}{d - r\cos z} = \frac{\frac{r}{d}\sin z}{1 - \frac{r}{d}\cos z} = \frac{\sin P \sin z}{1 - \sin P \cos z},$$

$$z_1 = z + p.$$

On aura d_1 par la formule (3)

$$d_1 \sin p = r \sin z.$$

Il est bon de faire observer dès ce moment que ces deux problèmes ne sont réellement distincts que pour la Lune. Quand il s'agit du Soleil, la parallaxe horizontale $P = 8'',86$ est si petite, qu'il n'y a aucune différence sensible entre $P \sin z$ et $P \sin z_1$. On trouve dans la *Connaissance des Temps* une petite Table qui donne p pour tous les jours de l'année et pour toutes les distances zénithales z ou z_1. Quant au diamètre angulaire du Soleil, qu'il soit vu de M ou de O, la variation de distance n'est que d'un rayon terrestre sur 23 000 et ne produit aucun effet appréciable.

Il n'en est pas de même du diamètre angulaire de la Lune : la variation de distance de M en O peut aller à un rayon terrestre sur 60 (distance moyenne de la Lune à la Terre) ; or $\frac{1}{60}$ de $15'36'' = 936''$ est d'environ $16''$ et n'est pas négligeable. Les équations (5) et (6), combinées avec les équations (2) et (3), donnent

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\sin z_1}{\sin z}.$$

Si z_1 est donné, remplaçons z par $z_1 - p$, développons le sinus en remplaçant $\cos p$ par 1 et $\sin p$ par sa valeur $\sin P \sin z_1$; il viendra

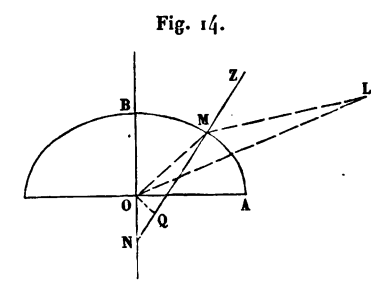
$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{1 - \sin P \cos z_1} = \Delta(1 + \sin P \cos z_1)$$

à très peu près.

Théorie de la parallaxe en tenant compte de l'aplatissement du globe terrestre (pour la Lune).

La transformation des coordonnées par changement d'origine est très simple, comme on vient de le voir, quand on déplace l'origine sur l'axe même du système, c'est-à-dire sur la verticale. Mais il n'en est plus ainsi lorsque l'on tient compte de l'aplatissement, parce que la verticale de l'observateur, à

Fig. 14.



laquelle se rapportent les coordonnées zénithales z_1 et A_1, ne passe pas en réalité par le centre de la Terre. C'est ce que montre la *fig.* 14. L'observateur étant en M, sa verticale MN et le rayon visuel ML déterminent un plan vertical dans lequel on a mesuré l'angle $ZML = z_1$. Le centre O de la Terre, pris pour nouvelle origine, est généralement en dehors du vertical de l'astre (à moins que celui-ci n'ait été observé à son passage au méridien); le nouvel axe de coordonnées doit être le rayon MO, et c'est l'angle $MOL = z$ qu'il s'agirait de déterminer. Ainsi, outre le déplacement de l'origine, il faudra encore changer la direction de l'axe d'un angle OMN qui, à la vérité, ne dépasse pas 12′.

Dans la pratique ordinaire, on tourne la difficulté en se contentant de transporter l'origine sur la verticale ZM au point Q, tel que $MQ = OM$; les formules précédentes restent alors applicables et n'exigent d'autre modification que de mettre MQ ou OM à la place du rayon r, supposé jusqu'ici constant.

La parallaxe horizontale équatoriale P d'un astre quelconque

dont la distance est d est donnée par la formule

$$\sin P = \frac{a}{d},$$

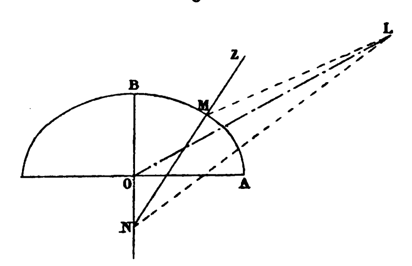
a étant le rayon équatorial du globe terrestre. Sur un autre parallèle que l'équateur, OM étant sa distance au centre de la Terre, la parallaxe horizontale P′ sera

$$\sin P' = \frac{OM}{d};$$

par suite, $\sin P' = OM \sin P$, en prenant a pour unité, ou bien $P' = OM.P$. Le facteur OM est donné dans la Table I; on remplacera dans les formules précédentes la parallaxe horizontale équatoriale donnée dans la *Connaissance des Temps* par P.OM, et c'est ce à quoi l'on se borne d'ordinaire.

Mais le point Q est à une distance trop grande du centre de la Terre pour que l'on doive se contenter de cette approximation quand il s'agit de la Lune. OQ étant sensiblement perpendiculaire à MN, son expression est $ON \sin\lambda = Ne^2 \cos\lambda \sin\lambda$. Son maximum répond à très-peu près à $\lambda = 45°$, et sa valeur est alors $\frac{1}{2}e^2$, à très-peu près, ou $\frac{1}{294}$. Or $P = 3422''$ en moyenne. On aura donc $\frac{3422''}{294} = 11'',6$ pour l'effet de ce petit écart OQ sur les coordonnées de la Lune.

Fig. 15.



Voici une théorie qui ne laisse rien à désirer.

Transportons l'origine de M en N, point où la verticale de l'observateur va couper l'axe de la Terre. Les formules précédentes subsisteront, à la condition de remplacer la distance OL

ou d par NL que nous nommerons d' et le rayon r de la Terre sphérique par MN ou la grande normale N.

Pour obtenir d', considérons le triangle NOL, qui n'est nullement dans le plan vertical ZNL (sauf le cas où la Lune serait dans le méridien terrestre BMA). Ce triangle se trouve dans le méridien céleste BNL. En désignant par δ et δ_1 les angles BOL, BNL et par π l'angle OLN, nous aurons

$$d' \sin\pi = \qquad \mathrm{ON} \sin\delta,$$
$$d' \cos\pi = d + \mathrm{ON} \cos\delta.$$

L'angle en L étant extrêmement petit, cette dernière équation peut s'écrire

$$d' = d\left(1 + \frac{\mathrm{ON}}{d}\cos\delta\right).$$

Or ON n'atteint pas 0,006 (*voir* la Table I), *a* étant pris pour unité; $\cos\delta$, pour la Lune, ne dépasse jamais $\frac{1}{3}$; le terme $\frac{\mathrm{ON}}{d}\cos\delta$ a donc pour limite supérieure $\frac{0,006}{60,273}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{30000}$ environ, quantité négligeable, à moins qu'on ne veuille calculer les corrections de parallaxe au centième près de la seconde. Ainsi le seul changement à opérer dans nos formules consiste à multiplier la parallaxe horizontale équatoriale par N.

Il resterait à remonter du point N au point O, en suivant cette fois l'axe des coordonnées polaires Æ et δ. Mais l'objet que l'on se propose en mesurant une distance zénithale de la Lune est d'en tirer soit l'angle horaire ou l'ascension droite, soit la colatitude du lieu d'observation; or toutes ces quantités se rapportent à l'axe NB; nous conserverons donc le point N comme origine, en ramenant la distance polaire δ de la Lune au point N par les formules déjà données

$$\delta_1 = \delta - \pi,$$
$$\pi = \mathrm{P.ON} \sin\delta.$$

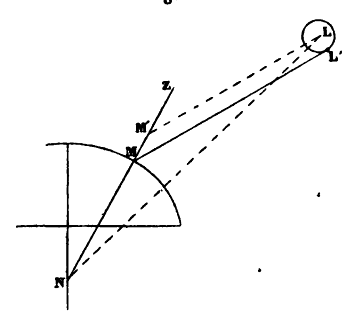
L'angle horaire ou l'ascension droite de la Lune, ou la colatitude λ, calculés avec ces éléments et la distance zénithale ZNL, seront les mêmes que si l'origine était en O.

Détails pratiques de calcul.

PREMIER PROBLÈME. — *On a observé la distance zénithale du bord inférieur de la Lune : calculer les corrections de parallaxe et du demi-diamètre apparent.*

Soit ζ cette distance zénithale corrigée de la réfraction ; cet angle sera représenté sur la *fig.* 16 par ZML', ML' étant

Fig. 16.



une tangente au globe lunaire. Menons par le centre L de la Lune LM' parallèle à ML'; l'angle ZM'L sera encore ζ, et l'on aura $\mathrm{MM'} = \dfrac{\mathrm{LL'}}{\sin\zeta}\cdot$ Soit p la parallaxe M'LN du centre de la Lune ; on aura, en prenant NL pour d,

$$d \sin p = \mathrm{NM'} \sin\zeta = \mathrm{NM} \sin\zeta + \mathrm{MM'} \sin\zeta = \mathrm{NM} \sin\zeta + \mathrm{LL'}.$$

Mais $\dfrac{\mathrm{NM}}{d} = \mathrm{N} \sin \mathrm{P}$, $\dfrac{\mathrm{LL'}}{d} = \sin \dfrac{1}{2}\Delta$; on aura donc

$$\sin p = \mathrm{N} \sin \mathrm{P} \sin\zeta + \sin\tfrac{1}{2}\Delta,$$

ou, plus simplement,

$$p = \mathrm{N.P} \sin\zeta + \tfrac{1}{2}\Delta,$$

par suite

$$z = \zeta - p.$$

Pour le diamètre apparent Δ_1 vu du point M, il faut calculer $\mathrm{ML} = d_1$.

Le triangle MLN donne

$$d_1^2 = d^2 + N^2 - 2dN\cos z,$$

d'où, en négligeant le carré, etc. de $\frac{N}{d}$ ou de $N\sin P$,

$$\frac{d_1}{d} = 1 - N\sin P\cos z,$$

par suite

$$\tfrac{1}{2}\Delta_1 = \tfrac{1}{2}\Delta(1 + N\sin P\cos z).$$

Le premier terme négligé est d'environ $\frac{1}{7200}$; $\frac{1}{2}\Delta = 934''$; l'erreur n'est pas de $0'',13$.

Second problème. — *On a calculé la distance zénithale* z *de la Lune vue du point* N : *trouver la distance zénithale* z_1 *vue du point* M, *où se trouve l'observateur.*

La formule rigoureuse serait, en posant $z_1 - z = p$,

$$\tan p = \frac{N\sin P\sin z}{1 - N\sin P\cos z}.$$

Il est plus simple de calculer une valeur approchée p' par la formule

$$p' = N.P\sin z$$

et une valeur définitive par

$$p = N.P\sin(z + p').$$

On calculera le diamètre apparent par la formule precédente.

Les corrections dues à la réfraction devant précéder, dans le premier cas, celles qui sont dues à la parallaxe, nous placerons les exemples de calcul après l'étude de la réfraction.

CHAPITRE V.

RÉFRACTION ASTRONOMIQUE.

L'observateur voit les astres à travers l'atmosphère qui nous entoure. Or cette atmosphère est douée, comme tous les gaz et toutes les vapeurs, d'un pouvoir réfringent très faible, mais sensible néanmoins; elle dévie donc les rayons lumineux qui viennent du vide des espaces célestes et doivent traverser ce milieu gazeux pour arriver jusqu'à nous.

L'atmosphère n'étant pas homogène, mais composée de couches dont la densité va en croissant vers le sol, la trajectoire d'un rayon de lumière, parfaitement rectiligne tant que ce rayon se meut dans les espaces célestes, devient une courbe de plus en plus prononcée à mesure qu'il pénètre dans notre atmosphère. C'est la déviation angulaire totale de ce rayon lumineux, depuis son entrée dans l'air jusqu'à l'œil de l'observateur, qui constitue la réfraction astronomique.

Il en est de même des rayons de lumière qui nous viennent des objets terrestres éloignés, tels que les cimes qu'on voit en mer au-dessus de l'horizon. Ces rayons, en traversant des couches d'air dont la densité varie avec la hauteur, décrivent des trajectoires curvilignes, et la déviation totale constitue la réfraction géodésique, dont nous aurons à nous occuper plus loin.

Avant donc d'introduire dans les équations (a), (b), (c) relatives au mouvement diurne les distances zénithales qu'on a mesurées, il faut corriger celles-ci de la déviation due à l'interposition de l'atmosphère, afin de les ramener à ce qu'on aurait observé dans le vide parfait.

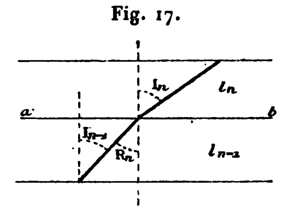
Nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que l'atmosphère est composée de couches sphériques infiniment minces, concentriques au globe terrestre, homogènes dans leur mince

épaisseur, mais variant de densité de l'une à l'autre suivant une certaine loi. Cet état n'existe pas dans la réalité; le Soleil, en échauffant inégalement les diverses parties de l'atmosphère, rompt incessamment l'équilibre que nous venons d'imaginer, mais des courants incessants qui règnent à toute hauteur tendent à le rétablir et y réussissent, de même que ceux de la mer parviennent à maintenir à très peu près le niveau général des eaux malgré les causes extérieures qui viennent le troubler.

Théorie de la réfraction en négligeant la courbure des couches atmosphériques.

Considérons deux couches successives parallèles et horizontales dont la densité est partout la même dans chacune d'elles, mais varie de l'une à l'autre à partir de leur surface plane de séparation ab. Soient (*fig.* 17) l_n et l_{n-1} leurs indices de réfraction,

Fig. 17.



I_n l'angle d'incidence d'un rayon traversant la première couche, R_n l'angle de réfraction au point où le rayon passe du premier milieu dans le second; I_{n-1} sera l'angle d'incidence sur la couche suivante. Une loi de Physique nous donne la relation

$$\frac{\sin I_n}{\sin R_n} = \frac{l_{n-1}}{l_n}.$$

Comme les couches sont parallèles, $R_n = I_{n-1}$; donc

$$l_n \sin I_n = l_{n-1} \sin I_{n-1} = l_{n-2} \sin I_{n-2} = \ldots.$$

Cette loi étant générale, appliquons-la aux extrémités de la trajectoire curviligne du rayon de lumière, c'est-à-dire au point A (*fig.* 18), où le rayon va pénétrer dans l'atmosphère sous l'incidence vraie z, et au point B, où l'astre est vu par l'observateur, dans la direction de la dernière tangente à sa trajectoire, sous

l'incidence apparente z_1. L'indice du vide, en A, est 1 ; désignons par l_1 l'indice de la couche la plus basse, en B ; l'équation générale deviendra

$$l_1 \sin z_1 = \sin z.$$

Fig. 18.

Désignons par ρ la déviation imprimée au rayon de lumière, c'est-à-dire la différence $z - z_1$; la relation précédente pourra s'écrire

$$\sin(z_1 + \rho) = l_1 \sin z_1.$$

Développons le sinus de $z_1 + \rho$, remplaçons le cosinus du très petit angle ρ par 1 et $\sin\rho$ par $\frac{\rho}{206265''}$, puis divisons les deux membres par $\cos z_1$; nous aurons finalement

$$\rho = 206265''(l_1 - 1)\,\text{tang}\, z_1.$$

L'indice de réfraction de l'air dépend de sa densité, par suite de la pression barométrique b et de la température t. Pour $b = 0^m,760$ et $t = 0°$, on a

$$l_1 - 1 = 0,000294.$$

En portant cette valeur dans l'expression de ρ, on obtient

$$\rho = 60'',64\,\text{tang}\, z_1.$$

On voit que nous n'avons pas eu besoin de connaître la loi suivant laquelle les indices de l'air diminuent de 1,000294 à 1 lorsqu'on s'élève dans l'atmosphère jusqu'à sa limite extrême. La réfraction, quand on néglige la sphéricité des couches, est donc indépendante de la constitution de l'atmosphère ; elle ne dépend que de l'indice l_1 de la couche où l'observateur est placé.

A la vérité, cet indice varie avec b et t. Les physiciens admettent que la fonction $l_1^2 - 1$ de l'indice de réfraction est proportionnelle à la densité; mais ici l'indice diffère si peu de l'unité, qu'on peut admettre la même proportionnalité pour $l_1 - 1$ ou pour le coefficient 60″,64 ([1]). Si donc l'observation est faite par une pression b et une température t, il suffira, pour calculer ρ, de remplacer la constante 60″,64 par

$$60'',64 \times \frac{b}{0,760} \times \frac{1}{1 + 0,00366\,t}.$$

Toute observation de distance zénithale doit donc être accompagnée des indications correspondantes du baromètre et du thermomètre. Les Tables de réfraction fournissent les valeurs de 60″,64 $\tan z_1$ calculées de degré en degré pour l'argument z_1. On y prend la valeur de ρ qui répond au z_1 observé. Mais ce n'est là que la réfraction moyenne; il faut encore la multiplier par le produit de deux facteurs numériques relatifs l'un à l'état du baromètre, l'autre à celui du thermomètre, que les Tables de réfraction donnent tout calculés.

Voici la comparaison de cette théorie avec les observations :

z_1.	ρ calculé.	ρ observé.
°	′ ″	′ ″
0......	0. 0	0. 0
10......	0.10,7	0.10,7
20......	0.22,0	0.22,0
30......	0.35,0	0.35,0
40......	0.50,9	0.50,8
50......	1.12,2	1.12,1
60......	1.44,9	1.44,6
70......	2.46,5	2.45,1
80......	5.43,7	5.32,3
90......	∞	35. 6,0

Jusqu'à 50° cette formule représente exactement les réfractions réelles, mais à partir de 50° l'erreur se manifeste; très

---

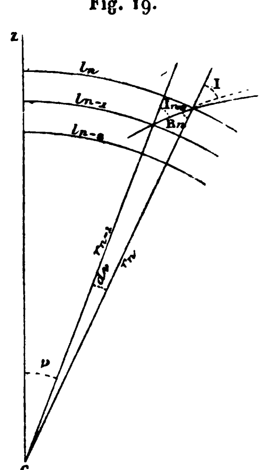
([1]) Posons $l_1 = 1 + \alpha$, α représentant la petite fraction 0,000294; nous aurons $l_1^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2$ et, en négligeant α^2, qui se réduit à 0,000000086, $l_1^2 - 1 = 2\alpha = 2(l_1 - 1)$. Si donc $l_1^2 - 1$ est proportionnel à la densité de l'air, on en peut dire autant de $l_1 - 1$ sans erreur sensible.

faible d'abord, elle grandit très vite à partir de 80° et elle devient infinie à l'horizon pour $z_1 = 90°$. Ainsi, près de l'horizon, la courbure des couches atmosphériques n'est plus du tout négligeable; mais il suffit de les considérer comme sphériques.

Théorie de la réfraction en tenant compte de la courbure des couches atmosphériques.

Soient deux couches sphériques infiniment minces de rayons r_n et r_{n-1}, d'indices l_n et l_{n-1} (*fig.* 19). Nous aurons encore, à

Fig. 19.



l'incidence I_n sur la surface inférieure de la première couche dont le rayon est r_n,

$$\frac{\sin I_n}{\sin R_n} = \frac{l_{n-1}}{l_n}.$$

D'autre part, le triangle formé par ces rayons et l'élément linéaire de la trajectoire lumineuse donne

$$\frac{\sin R_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{r_{n-1}}{r_n}.$$

Multiplions ces deux équations membre à membre; nous aurons

$$\frac{\sin I_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{r_{n-1} l_{n-1}}{r_n l_n}$$

ou bien

$$r_n l_n \sin I_n = r_{n-1} l_{n-1} \sin I_{n-1},$$

et, par extension,

(1) $$rl \sin I = \text{const.},$$

relation générale qui s'applique sur toute l'étendue de la trajectoire lumineuse et suppose seulement que chaque couche d'air de même densité ou de même indice est partout normale aux verticales qui la rencontrent.

Rapportons la courbe lumineuse à un système de coordonnées polaires ayant son centre au point C, centre de la Terre, pour rayon vecteur r et pour angle variable l'angle au centre v compté à partir de la verticale OZ de l'observateur. Le petit angle en C du triangle précédent sera dv; désignons de plus par $d\rho$ l'angle de deux éléments linéaires consécutifs de la trajectoire. Le triangle déjà considéré nous donne

$$I_{n-1} = R_n + dv = I_n - d\rho + dv,$$

et, si l'on pose $I_n - I_{n-1} = dI$, cette relation devient

$$d\rho = dI + dv.$$

Dans toute courbe rapportée à des coordonnées polaires r et v et faisant l'angle I avec le rayon vecteur r, on a

$$\frac{r\,dv}{dr} = \operatorname{tang} I.$$

Enfin, en différentiant l'équation (1) après avoir pris les logarithmes des deux membres, il vient

$$\frac{dr}{r} + \frac{dl}{l} + \frac{dI}{\operatorname{tang} I} = 0.$$

Multiplions par tang I et remplaçons $\operatorname{tang} I \dfrac{dr}{r}$ par dv,

$$dv + \operatorname{tang} I \frac{dl}{l} + dI = 0.$$

On a donc finalement $d\rho = -\dfrac{dl}{l} \operatorname{tang} I$. Dans cette expression I dépend de r et de l en vertu de l'équation générale (1). Pour l'intégrer, il faudrait donc connaître la loi suivant laquelle

l'indice l varie avec r. Supposons que cette loi soit

$$rl^m = \text{const.}$$

dans toute l'étendue de l'atmosphère, m étant un certain nombre que nous nous réservons de déterminer par l'observation. On aura, en différentiant logarithmiquement cette relation,

$$\frac{dr}{r} + m\frac{dl}{l} = 0.$$

En la multipliant par tang I elle se réduira à

$$dv - m d\rho = 0,$$

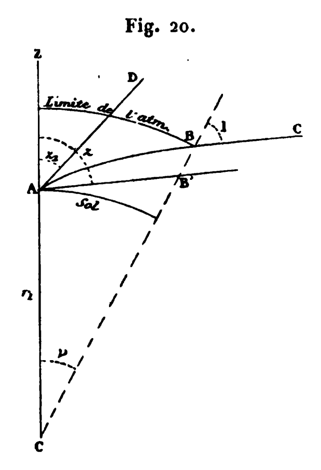
dont l'intégrale est évidemment

$$\rho = \frac{v}{m}.$$

La constante est nulle, car ρ doit s'annuler avec v.

Ainsi, dans cette constitution hypothétique de l'atmosphère, la réfraction est toujours une même fraction $\frac{1}{m}$ de l'angle au centre sous-tendu par la trajectoire lumineuse. Dès lors il est aisé d'avoir la réfraction pour une distance zénithale donnée z_1.

Fig. 20.



Aux deux bouts de la trajectoire, l'équation (1) devient, en désignant par R le rayon OB de la surface extérieure de l'atmosphère, par I le premier angle d'incidence (sur ce rayon OB),

par 1 l'indice du vide extérieur, par r_1, l_1, z_1 les éléments analogues en A,

$$R \sin I = r_1 l_1 \sin z_1.$$

Menons par le point A une parallèle AB′ au rayon BC qui se meut dans le vide; l'angle DAB′, formé par la dernière tangente à la trajectoire et la ligne BC ou AB′, sera la réfraction, et nous aurons

$$z \text{ ou } z_1 + \rho = I + v = I + m\rho,$$

puisque $\rho = \frac{v}{m}\cdot$ Portons cette valeur de I dans l'équation précédente, en remarquant que la condition $rl^m =$ const. donne ici $R = r_1 l_1^m$; nous obtiendrons l'équation finale de la réfraction en termes finis

$$\sin[z_1 - (m-1)\rho] = l_1^{m-1} \sin z_1.$$

Il est aisé de lui donner une forme un peu plus commode pour le calcul. Ajoutons et retranchons successivement $\sin z_1$ aux deux membres:

$$2\sin\left(z_1 - \frac{m-1}{2}\rho\right)\cos\frac{m-1}{2}\rho = \left(l_1^{m-1} + 1\right)\sin z_1,$$

$$2\cos\left(z_1 - \frac{m-1}{2}\rho\right)\sin\frac{m-1}{2}\rho = \left(l_1^{m-1} - 1\right)\sin z_1.$$

En divisant membre à membre,

$$\operatorname{tang}\frac{m-1}{2}\rho = \frac{l_1^{m-1} - 1}{l_1^{m-1} + 1}\operatorname{tang}\left(z_1 - \frac{m-1}{2}\rho\right).$$

Faisons $l_1 = 1 + \alpha$, et, comme α est très petit, bornons-nous aux deux premiers termes du développement de $(1+\alpha)^{m-1}$; il viendra, en remarquant que α peut être négligé au dénominateur lorsqu'on laisse de côté les termes en α^2,

$$\operatorname{tang}\frac{m-1}{2}\rho = \frac{m-1}{2}\alpha \operatorname{tang}\left(z_1 - \frac{m-1}{2}\rho\right).$$

Pour obtenir la valeur de $\frac{m-1}{2}$, on aura recours à une réfraction un peu forte et bien déterminée par des observations astronomiques concordantes, faites vers la pression de $0^m,760$ et la température de 0°. Laplace a trouvé ainsi $\frac{m-1}{2} = 3,25$, d'où $m = 7,5$. En remplaçant la tangente du petit angle

$\frac{m-1}{2}\rho$ par l'arc, il vient finalement

$$\rho = 60'',67 \operatorname{tang}(z_1 - 3,25\rho),$$

formule qu'on calcule par tâtonnement et que l'on réduira facilement en Tables; elle donne la réfraction astronomique jusqu'à l'horizon.

Nous verrons plus loin que l'hypothèse sur la constitution de l'atmosphère $rl^m =$ const. répond bien aux réfractions géodésiques; leur étude fournit pour m précisément la même valeur 7,5. Mais les géomètres ne se sont pas contentés de cette hypothèse; ils en ont essayé beaucoup d'autres pour suppléer à l'ignorance où nous sommes de la véritable loi du décroissement des densités de l'air dans le sens vertical. Le résultat le plus frappant de ces tentatives, essentiellement arbitraires, a été celui-ci : jusqu'à 80° de distance zénithale, toutes les hypothèses donnent aux réfractions la même valeur. Donc les réfractions entre le zénith et 80° sont indépendantes de la loi de constitution de l'atmosphère. Pourvu que les couches d'air soient des couches de niveau, c'est-à-dire soient normales partout à la direction de la pesanteur, la réfraction astronomique ne dépend que de la distance zénithale et de l'indice de la couche où se fait l'observation. C'est seulement au delà de 80° qu'il faut, pour calculer exactement les réfractions, adopter une loi du décroissement des densités ou des indices.

Les géomètres ont reconnu que l'on s'approchait d'autant plus du but que la loi hypothétique, dont l'intervention est alors nécessaire, représente mieux le décroissement en hauteur des températures. Celle qui sert de base à la théorie de Laplace jouit de cette propriété, tandis que la loi hypothétique admise par Bessel n'y satisfait nullement. Nous regardons donc les réfractions calculées par la formule de Laplace et publiées dans la *Connaissance des Temps* comme préférables. La formule de Laplace est

$$\begin{aligned}\rho = 2790'',157(0,75479 - 0,49042\,T^2)\sin z_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{T^2} \int_T^\infty e^{-t^2}\,dt \\ + 10021,342 \sin 2z_1,\end{aligned}$$

dans laquelle $T = 25,962 \cos z_1$.

Quant au degré de précision des réfractions ainsi calculées, on en jugera par le petit Tableau suivant, donné par Bessel :

Valeurs de z_1.	Erreur probable de la réfraction calculée.
45°. 0′...........	± 0″,27
81. 0...........	± 1,00
85. 0...........	± 1,70
89.30...........	± 20,00

Concluons-en que, dans la pratique de la navigation, on est en droit de considérer comme nulles les erreurs de la réfraction fournie par la Table de la *Connaissance des Temps*, sauf dans les cinq derniers degrés, pourvu que l'on applique les corrections relatives au baromètre et au thermomètre dans la couche d'air où se trouve l'observateur.

Il est bien remarquable que la condition essentielle de toutes ces théories, à savoir le parallélisme des couches d'égale densité, soit confirmée par les faits, c'est-à-dire par l'accord des réfractions calculées dans cette hypothèse avec les réfractions réelles. Il en résulte cette conséquence, constamment vérifiée par les observateurs : la réfraction élève les astres sans les faire sortir de leur vertical; elle est toute en hauteur et n'altère point les azimuts.

Il en résulte encore que les grands courants verticaux ascendants que les météorologistes placent dans l'épaisseur de l'atmosphère n'existent pas; autrement ils mélangeraient les couches et rompraient leur parallélisme. Les courants atmosphériques sont, comme ceux de la mer, à peu près horizontaux et répondent à des dénivellations relativement très-faibles. C'est pourquoi la Table des réfractions de la *Connaissance des Temps* convient aux régions torrides aussi bien qu'aux climats tempérés ou aux contrées polaires.

La Table des réfractions de la *Connaissance des Temps* a pour argument la distance zénithale apparente z_1 (ou la hauteur apparente). La réfraction ρ qu'on en déduit doit être retranchée de z_1 et donne z, distance zénithale vraie. Mais on rencontre souvent, dans la pratique de la navigation (distances lunaires), le problème inverse :

Étant donnée la distance zénithale vraie z, trouver la réfraction ρ, afin de calculer la distance zénithale apparente z_1.

Les formules précédentes donneront la réfraction pour la distance vraie z si l'on y remplace z_1 par $z - \rho$. Par exemple, de

$$\rho = 60'',67 \operatorname{tang}(z_1 - 3,25\rho)$$

on déduirait

$$\rho = 60'',67 \operatorname{tang}(z - 4,25\rho).$$

Mais il vaut encore mieux faire une Table spéciale dont l'argument sera z au lieu de z_1 et où l'on prendra à vue la réfraction correspondante. Telle est la Table ci-jointe.

Cette Table étant destinée à la réduction des distances lunaires, où l'on doit tenir un compte exact de la réfraction, nous y avons adjoint une petite correction additionnelle pour la température. L'ensemble des corrections météorologiques de la réfraction moyenne, développé en série par Laplace, a pour terme influent le produit de cette réfraction par les facteurs $\frac{b}{0,760}$ et $\frac{1}{1 + 0,00366t}$, et c'est à ce premier terme que nous nous sommes arrêtés dans ce qui précède. Mais il existe d'autres termes dépendant des puissances supérieures de ces facteurs, lesquels deviennent sensibles pour les grandes distances zénithales. On les néglige lorsqu'il s'agit d'observations ordinaires, mais il n'est pas prudent de les omettre dans le calcul des distances lunaires. Il suffit d'ajouter, à la réfraction calculée à la manière ordinaire, le petit terme pris dans la Table auxiliaire avec la température pour argument ([1]). Cette Table ne dépasse pas 87° parce que, au delà de cette distance zénithale, les observations elles-mêmes deviennent peu sûres et ne paraissent guère propres à des déterminations délicates. Il est à regretter, néanmoins, que les Tables de réfraction déduites de la théorie de Laplace n'aient pas été soumises, comme celles de Bessel, au contrôle des observations dans les régions encore plus voisines de l'horizon.

([1]) Cette petite Table est tirée de la *Connaissance des Temps* pour 1851, Mémoire de M. Caillet.

TABLE II.

Réfractions pour distances zénithales vraies.

Baromètre, $0^{m},760$. — Thermomètre, $+10^{\circ}$.

z vrai.	RÉFRACTION.	DIFFÉRENCE pour 1′.	z vrai.	RÉFRACTION.	DIFFÉRENCE pour 1′.	z vrai.	RÉFRACTION.	DIFFÉRENCE pour 1′.
°	″	″	°	′ ″	″	° ′	′ ″	″
0	0,0	0,017	34	0.39,3	0,025	68. 0	2.23,1	0,124
1	1,0	0,017	35	40,8	0,026	69. 0	30,5	0,135
2	2,0	0,017	36	42,3	0,026	70. 0	38,5	0,149
3	3,1	0,017	37	43,9	0,027	71. 0	47,5	0,164
4	4,1	0,017	38	45,5	0,028	72. 0	57,1	0,182
5	5,1	0,017	39	47,2	0,028	73. 0	3. 8,0	0,203
6	6,1	0,017	40	48,9	0,029	74. 0	20,1	0,228
7	7,2	0,017	41	50,7	0,030	75. 0	33,7	0,258
8	8,2	0,017	42	52,5	0,031	76. 0	49,0	0,27
9	9,2	0,018	43	54,4	0,032	10	51,7	0,28
10	10,3	0,018	44	56,3	0,033	20	54,5	0,29
11	11,3	0,018	45	58,3	0,034	30	57,4	0,29
12	12,4	0,018	46	1. 0,3	0,036	40	4. 0,3	0,30
13	13,5	0,018	47	2,5	0,037	50	3,3	0,31
14	14,5	0,018	48	4,7	0,038	77. 0	6,4	0,32
15	15,6	0,018	49	7,0	0,040	10	9,6	0,31
16	16,7	0,019	50	9,4	0,042	20	12,7	0,33
17	17,8	0,019	51	11,9	0,044	30	16,0	0,34
18	18,9	0,019	52	14,4	0,046	40	19,4	0,35
19	20,1	0,019	53	17,1	0,048	50	22,9	0,36
20	21,2	0,019	54	20,0	0,050	78. 0	26,5	0,36
21	22,4	0,020	55	23,0	0,053	10	30,1	0,37
22	23,6	0,020	56	26,2	0,055	20	33,9	0,38
23	24,8	0,020	57	29,5	0,058	30	37,7	0,40
24	26,0	0,020	58	33,0	0,062	40	41,7	0,41
25	27,2	0,021	59	36,7	0,065	50	45,8	0,41
26	28,4	0,021	60	40,6	0,069	79. 0	49,9	0,43
27	29,7	0,022	61	44,7	0,074	10	54,2	0,44
28	31,0	0,022	62	49,2	0,079	20	58,6	0,45
29	32,3	0,022	63	53,9	0,084	30	5. 3,1	0,46
30	33,7	0,023	64	58,8	0,090	40	7,7	0,48
31	35,0	0,023	65	2. 4,2	0,097	50	12,5	0,48
32	36,4	0,024	66	10,1	0,105	80. 0	17,3	0,51
33	37,9	0,024	67	16,4	0,114	10	22,4	0,52
34	39,3		68	23,1		20	27,6	

TABLE II.

Réfractions pour distances zénithales vraies. (*Suite.*)

Baromètre, 0m,760. — Thermomètre, +10°.

z vrai.	RÉFRACTION.	DIFFÉRENCE pour 1′.	z vrai.	RÉFRACTION.	DIFFÉRENCE pour 1′.	z vrai.	RÉFRACTION.	DIFFÉRENCE pour 1′.
° ′	′ ″	″	° ′	′ ″	″	° ′	′ ″	″
80.20	5.27,6	0,53	82.40	7. 1,3	0,86	85. 0	9.39,5	1,54
30	32,9	0,56	50	9,9	0,89	10	54,9	1,61
40	38,5	0,57	83. 0	18,8	0,93	20	10.11,0	1,70
50	44,2	0,59	10	28,1	0,96	30	28,0	1,78
81. 0	50,1	0,60	20	37,7	1,01	40	45,8	1,87
10	56,1	0,63	30	47,8	1,04	50	11. 4,5	1,97
20	6. 2,4	0,65	40	58,2	1,09	86. 0	24,2	2,06
30	8,9	0,68	50	8. 9,1	1,12	10	44,8	2,17
40	15,7	0,69	84. 0	20,3	1,19	20	12. 6,5	2,29
50	22,6	0,72	10	32,2	1,23	30	29,4	2,45
82. 0	29,8	0,75	20	44,5	1,29	40	53,9	2,57
10	37,3	0,77	30	57,4	1,34	50	13.19,6	2,72
20	45,0	0,80	40	9.10,8	1,40	87. 0	46,8	2,85
30	53,0	0,83	50	24,8	1,47	10	14.15,3	
40	7. 1,3		85. 0	39,5				

Correction secondaire de la température.

z.	— 10°.	0°.	+ 10°.	+ 20°.	+ 30°.
75°	+ 0″,4	+ 0″,2	0	— 0″,1	— 0″,3
76	0,4	0,2	0	0,2	0,4
77	0,5	0,3	0	0,2	0,4
78	0,6	0,3	0	0,3	0,6
79	0,8	0,4	0	0,4	0,8
80	1,2	0,6	0	0,5	1,0
81	1,6	0,8	0	0,7	1,3
82	2,3	1,1	0	1,0	1,9
83	3,4	1,6	0	1,6	2,9
84	5,4	2,6	0	2,5	4,6
85	8,4	4,5	0	4,3	8,0
86	18,4	8,8	0	8,1	15,6

Corrections de parallaxe et de réfraction. — Exemples numériques.

Lorsqu'on a mesuré la distance zénithale du bord inférieur du Soleil ou de la Lune pour en déduire l'heure ou la colatitude, il faut commencer par lui ajouter la réfraction et en retrancher le demi-diamètre angulaire de l'astre pour avoir la distance zénithale vraie. On calcule ensuite la parallaxe, que l'on ajoute à cette distance, ce qui donne la distance zénithale géocentrique, c'est-à-dire l'élément qui figure dans les formules (a), (b), (c). L'erreur probable de ces mesures étant d'environ 0',2, ces trois corrections n'ont pas besoin d'être calculées avec une extrême précision ; il suffit que les petites négligences du calcul n'augmentent pas de 0',05 l'incertitude du résultat. Les Tables de réfraction et de parallaxe solaire qu'on trouve dans la *Connaissance des Temps*, les Tables de parallaxe et de demi-diamètres apparents pour la Lune qui sont entre les mains des marins suffisent amplement dans ce cas, et rendent ces petits calculs journaliers très rapides. En voici deux exemples.

Le 2 juin 1878, la distance zénithale apparente du bord inférieur du Soleil ou de la Lune a été trouvée de 81°0'44''; baromètre, 0m,740; thermomètre, + 20° : on demande la distance zénithale vraie et géocentrique du centre de chacun de ces astres.

Pour 81°0' :	ρ moyen...	5'.54''	Facteur barométrique...	0,974	354''
	Correction.	0.22	Facteur thermométrique.	0,964	260,0
	ρ.....	5.32	Somme — 1........	0,938	21
					1
					22

Calcul pour le Soleil.

	ζ_1.....		81°. 0'.44''
	ρ.....	+	0. 5.32
	ζ.....		81. 6.16
Conn. des Temps.	$\frac{1}{2}\Delta$....	—	0.15.48
Id.	p.....	—	0. 0. 7
	z.....		80.50.21 = 80°50',4

Calcul pour la Lune. $P = 57'23'',3$, $\frac{1}{2}\Delta = 15'40''$, $N = 1$.

ζ...........	81°. 6'.16"	log P....	3,53697	*Calcul de* $\frac{1}{2}(\Delta_1 - \Delta)$.	
C. d. T. $\frac{1}{2}\Delta$.........	— 0.15.40	log sin z_1.	9,99443	log sin P.	8,222
z_1 Centre....	80.50.36	log p....	3,53140	log cos z_1.	9,202
p..........	— 0.56.39	p.......	3399",4	log $\frac{1}{2}\Delta$...	2,973
	79.53.57				0,397
Augm. de $\frac{1}{2}\Delta$.	— 0. 0. 2,5				2",5
z...........	79.53.54 = 79°53',9				

Avec les Tables susdites, on évite les deux petits calculs de p et de Δ_1, et l'opération est presque aussi rapide que pour le Soleil. Si même ζ ne dépasse pas 45°, on se dispense de tenir compte des facteurs du thermomètre et du baromètre.

Mais, lorsqu'il s'agit de la réduction des distances lunaires, il faut calculer avec un peu plus de précision; c'est alors que se présente le second cas traité plus haut, celui où l'on a calculé z et où l'on veut en déduire z_1. On trouvera plus loin un exemple de ce genre de calculs.

Influence de la réfraction sur la figure des astres.

Le Soleil et la Lune sont parfaitement sphériques; leurs disques apparents seraient donc ronds si la réfraction n'en altérait la figure en relevant un peu plus le bord inférieur que le bord supérieur. En désignant par z_1 la distance zénithale du centre, par Δ le diamètre angulaire, par $d\rho$ la variation de la réfraction pour 1' vers la distance zénithale z_1, $\frac{1}{2}\Delta d\rho$ sera l'accourcissement ou l'aplatissement produit dans le rayon vertical du disque de l'astre par la réfraction, Δ étant exprimé en minutes. Si l'on considère les ordonnées du contour du disque perpendiculaires au diamètre horizontal, qui ne change pas, ces ordonnées seront elles-mêmes accourcies dans le même rapport de $1 - d\rho$ à l'unité. Le disque circulaire de l'astre se trouvera donc changé en une ellipse plus ou moins aplatie. A l'horizon, $d\rho = 11'',2$ par minute de variation dans z_1. Pour $\Delta = 32'$, $\frac{1}{2}\Delta d\rho = 3'$; l'aplatissement de $\frac{3}{16}$ sera parfaitement sen-

sible et frappera le spectateur. Mais il diminue rapidement à mesure que l'astre s'élève ; la différence des deux demi-axes de l'ellipse en question n'est plus que de 2″ à 20°, de 1″ à 30°, de 0″,6 à 40°, et à partir de là devient négligeable quand on ne tient pas aux dixièmes de seconde.

Les cordes horizontales du disque solaire ou lunaire subissent elles-mêmes un raccourcissement particulier, mais beaucoup moindre que le précédent. Puisque la réfraction s'exerce dans le plan vertical où se trouve le point considéré, en relevant ce point d'une petite quantité angulaire ρ, le demi-diamètre horizontal bc, compris entre le vertical du centre Zb et celui de l'extrémité c, se trouvera transporté en b_1c_1 (*fig.* 21) entre les deux mêmes verticaux. Or b_1c_1 est généralement plus petit que bc. Soient (A) l'angle des deux plans verticaux susdits, z et z_1 les distances zénithales Zb et Zb_1, Δ et Δ_1 les diamètres vrai et réfracté ; nous aurons, par les triangles rectangles Zbc, Zb_1c_1,

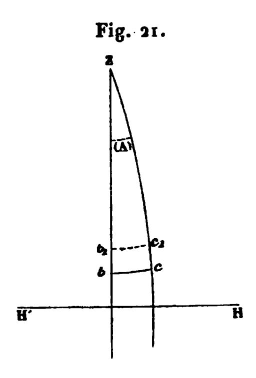
$$\tang \tfrac{1}{2}\Delta = \tang(A)\sin z, \quad \tang\tfrac{1}{2}\Delta_1 = \tang(A)\sin z_1.$$

En divisant membre à membre ces deux équations, il vient

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\sin z_1}{\sin z}.$$

A l'horizon, $z_1 = 90°$, $z = 90°34'$, d'après les Tables de ré-

Fig. 21.



fraction ; $\sin z_1$ est alors un peu plus grand que $\sin z$, et Δ_1 sera aussi plus grand que Δ. La différence ne dépasse pas, d'ail-

leurs, $0'',4$ pour $\frac{1}{2}\Delta = 16'$. Un peu plus haut, les deux diamètres réel et apparent sont égaux ; mais, à partir de là jusqu'au zénith, le diamètre apparent diminue insensiblement. Vers $z = 80^\circ$, la différence atteint $0'',28$; elle est encore de $0'',27$ au zénith. En voici le calcul. De l'égalité précédente on déduit

$$\frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta + \Delta_1} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(z - z_1)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(z + z_1)}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{\Delta - \Delta_1}{2\Delta} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\rho}{\operatorname{tang} z_1}.$$

Or $\operatorname{tang}\rho = (l_1 - 1)\operatorname{tang} z_1 = 0,000294 \operatorname{tang} z_1$. Donc

$$\tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta_1 = 0'',000294\,\frac{\Delta}{2},$$

si Δ est exprimé en secondes d'arc. Si Δ l'est en minutes, on multipliera son facteur numérique par 60 et l'on aura

$$\tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta_1 = 0'',017\,\frac{\Delta}{2},$$

différence constante (de 80° à 0°) qui se réduit à $0'',28$ pour $\frac{\Delta}{2} = 16'$.

Ainsi, du zénith jusqu'à une assez faible hauteur, le disque circulaire du Soleil est transformé en une ellipse dont les demi-axes sont

$$\tfrac{1}{2}\Delta(1 - 0'',017) \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}\Delta(1 - d\rho).$$

Si l'on désigne par S_1 l'angle d'un rayon du disque avec le vertical du centre, c'est-à-dire avec l'axe des y dans un système de coordonnées rectangulaires, on aura, pour le disque circulaire de rayon $\frac{\Delta}{2}$,

$$x = \frac{\Delta}{2}\sin S_1, \quad y = \frac{\Delta}{2}\cos S_1.$$

Ces coordonnées deviendront, pour l'ellipse, si $\alpha = 0'',017$,

$$(1 - \alpha)\frac{\Delta}{2}\sin S_1, \quad (1 - d\rho)\frac{\Delta}{2}\cos S_1.$$

Le rayon elliptique sera la racine carrée de

$$(1 - 2\alpha)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \sin^2 S_1 + (1 - 2\,d\rho)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \cos^2 S_1,$$

expression où nous avons négligé α^2 et $(d\rho)^2$, et qui revient à

$$\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2[1-2\alpha-2(d\rho-\alpha)\cos^2 S_1],$$

et dont la racine carrée est

$$\frac{\Delta}{2}[1-\alpha-(d\rho-\alpha)\cos^2 S_1].$$

De $z=0°$ à $z=20°$, le dernier terme est nul, en sorte que la diminution porte également sur tous les rayons et se réduit à 0″,27. A partir de $z=20°$, le dernier terme va en augmentant, mais n'atteint pas 0″,1 pour $z=30°$, 0″,4 pour $z=50°$, 0″,8 pour $z=60°$. C'est seulement à partir de 60° qu'il convient de tenir compte de cette correction quand on ne calcule qu'à la seconde près.

Le petit Tableau suivant pourra être consulté à ce sujet :

Accourcissement pour $\frac{1}{2}\Delta=16'$.

S_1.	De $z_1=0°$ à $z_1=30°$.	$z_1=60°$.	$z_1=70°$.	$z_1=80°$.
0°	0″,3	1″,3	2″,3	8″,4
10	0,3	1,3	2,2	8,2
20	0,3	1,1	2,0	7,5
30	0,3	0,9	1,8	6,4
40	0,3	0,7	1,4	5,1
50	0,3	0,5	1,1	3,6
60	0,3	0,4	0,8	2,3
70	0,3	0,3	0,5	1,2
80	0,3	0,3	0,3	0,5
90	0,3	0,3	0,3	0,3

Ces nombres sont relatifs à la pression moyenne de 0m,760 et à la température de 10°; pour d'autres circonstances météorologiques, il faudrait les multiplier par les facteurs ordinaires de la réfraction. On tient compte de ces effets dans le calcul des distances lunaires lorsqu'ils atteignent 1″.

CHAPITRE VI.

MESURE DU TEMPS.

Temps solaire. — Heure vraie. — Heure moyenne.

Nous avons pris jusqu'ici le jour sidéral pour unité de temps. Les étoiles, le point vernal lui-même, origine des Æ, étant considérés comme des points fixes dans le ciel, leur vitesse diurne apparente est uniquement due à la rotation terrestre; elle est donc de 360° par jour sidéral et de 15° par heure ([1]). Mais les astres de notre système solaire ne sont pas fixes; leurs coordonnées uranographiques Æ et δ varient avec le temps; par suite, l'intervalle de leurs passages successifs au méridien d'un lieu donné diffère notablement du jour sidéral.

Si l'Æ d'un de ces astres croissait simplement en raison du temps et pouvait être représentée par

$$Æ_0 + nt,$$

t étant exprimé en heures, la variation horaire de cette ascension droite serait constante et égale à n. Dès lors la vitesse de son mouvement diurne ne serait plus 15° par heure, mais bien $15° - n$. Avec cette vitesse, le temps employé pour décrire 360° et revenir au méridien serait

$$\frac{360°}{15° - n},$$

durée constante qui mesurerait la longueur du jour de l'astre considéré, durée plus longue que le jour sidéral si l'astre a un mouvement propre de sens opposé à celui du ciel.

([1]) En réalité le point vernal γ est affecté d'une petite inégalité périodique appelée *nutation;* le jour sidéral, réglé sur les passages du point γ au méridien, n'est donc pas rigoureusement constant, mais ses très lentes et très faibles variations sont négligeables. Quant au déplacement du point γ dû à la précession, ce petit mouvement étant uniforme, l'effet produit sur la durée du jour sidéral est constant et se trouve compris dans l'évaluation suivante.

Le Soleil, par exemple, fait en un an de $366^j,2422$ sidéraux une révolution entière par rapport au point γ, en sens inverse du mouvement diurne. La Lune décrit pareillement ces 360°, ou 21 600′, en $27^j,3965$. Leurs vitesses par heure sidérale sont donc respectivement, en supposant le mouvement uniforme,

$$\frac{21600'}{366,2422 \times 24} = 2',457, \quad \frac{21600'}{27,3965 \times 24} = 32',851.$$

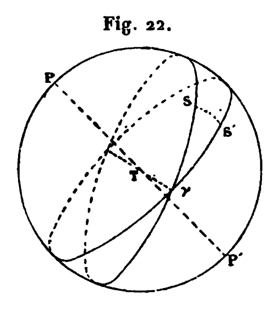
Ainsi le mouvement horaire de ces astres, résultant de la rotation céleste et de leur mouvement propre, sera réduit de 15° ou 900′ à 897′,543 et 867′,149. La durée du jour, en temps sidéral, serait donc constamment égale à

$$\frac{21600}{897,543} = 24^h 3^m 56^s,56 \text{ pour le Soleil,} \quad \frac{21600}{867,149} = 24^h 55^m \text{ pour la Lune.}$$

Les choses ne se passent pas tout à fait ainsi ; l'Æ de ces astres contient bien une partie proportionnelle au temps, et c'en est même la partie la plus considérable, mais elle contient aussi des termes périodiques où le temps est engagé sous le signe sinus. Dès lors la durée du jour solaire ou lunaire ne saurait être constante et servir à la mesure du temps. Examinons très rapidement ces particularités du mouvement propre du Soleil.

L'astre se meut dans un plan γS (*fig.* 22) incliné d'un angle $\omega = 23°27'$ sur celui de l'équateur $\gamma S'$.

Fig. 22.



L'orbite du Soleil, étant plane, a pour perspective sur la sphère céleste un grand cercle qui porte le nom d'*écliptique*. Le point d'intersection γ de l'écliptique et de l'équateur, où

le Soleil passe en allant de la région australe du ciel dans la région boréale, est l'origine des Æ. La position du Soleil dans le plan de son orbite est définie à tout instant par sa longitude $\gamma\mathrm{TS} = \mathrm{L}$ et par son rayon vecteur r. Cette orbite apparente est une ellipse dont la Terre occupe un foyer; on désigne par e son excentricité, par a le demi-grand axe et par ϖ la longitude de l'extrémité de cet axe la plus rapprochée de la Terre (périgée). La première loi de Kepler nous apprend que ce ne sont pas les angles L décrits par le rayon vecteur du Soleil autour du centre de la Terre, mais les aires parcourues par ce rayon qui croissent proportionnellement au temps. D'après cela, si T désigne la durée de l'année pendant laquelle le rayon vecteur du Soleil a parcouru angulairement 360° et superficiellement toute la surface $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ de l'ellipse, on aura, pour l'aire décrite pendant l'élément de temps dt,

$$\frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{1}\,dt.$$

D'autre part, si $d\mathrm{L}$ est la variation de la longitude correspondant à dt, la variation de l'aire décrite par le rayon vecteur sera $\frac{1}{2} r^2 d\mathrm{L}$. On aura donc l'équation différentielle suivante,

$$\tfrac{1}{2} r^2 d\mathrm{L} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\mathrm{T}}\,dt = \tfrac{1}{2} a^2 \sqrt{1-e^2}\, n\, dt,$$

en posant $\frac{2\pi}{\mathrm{T}} = n$, c'est-à-dire la vitesse angulaire moyenne dont nous parlions tout à l'heure.

En intégrant cette équation, on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{L} = \mathrm{L}_0 + nt &+ 2e \sin(\mathrm{L}_0 + nt - \varpi) \\ &+ \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2(\mathrm{L}_0 + nt - \varpi) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$\mathrm{L}_0 + nt$ étant la longitude *moyenne* à la date t. Ainsi la longitude du Soleil se compose de deux parties; l'une, la plus considérable, croît proportionnellement au temps, l'autre est périodique. Le premier terme de celle-ci a pour période l'année, le second la moitié de l'année, et ainsi de suite. Dans le cours d'une

année, l'ensemble de ces termes, que les astronomes appellent l'*équation du centre*, passe par toutes les valeurs positives ou négatives qu'il peut acquérir; au bout d'une année, leur somme redevient nulle comme au commencement, et le Soleil se retrouve à sa longitude initiale avec une circonférence de plus.

La durée des jours solaires, c'est-à-dire l'intervalle des passages successifs du Soleil au méridien d'un lieu quelconque, est réglée par l'Æ et non par la coordonnée L de cet astre. La *fig.* 22 donne, par le triangle rectangle $\gamma SS'$, où $\gamma S'$ est la projection de $\gamma S = L$ sur l'équateur, la relation

$$\tan Æ = \tan L \cos\omega.$$

Les astronomes réduisent en série la différence Æ — L; on a ainsi (p. 33)

$$Æ - L = -\tan^2\tfrac{1}{2}\omega \sin 2L + \tfrac{1}{2}\tan^4\tfrac{1}{2}\omega \sin 4L - \ldots.$$

Ces termes périodiques portent le nom de *réduction à l'équateur*. La période du premier terme est d'une demi-année; ce terme s'annule quand $L = 0$, $90°$, $180°$ ou $270°$. Celle du deuxième terme est d'un quart d'année, et ainsi de suite. Dans le cours d'une demi-année, l'effet de ces termes disparaît, leurs valeurs négatives ayant exactement compensé leurs valeurs positives.

En réunissant ces deux expressions, on a

$$Æ = \text{Long. moyenne} + \text{Éq. du centre} + \text{Réd. à l'équateur}.$$

Les jours solaires vrais ne sauraient donc être égaux. Pour établir une mesure uniforme du temps qui se rapproche autant que possible des jours et heures solaires, on prend un Soleil fictif dont l'ascension droite $Æ_m$ est égale à la partie proportionnelle au temps de l'ascension droite vraie Æ, c'est-à-dire à la longitude moyenne $L_0 + nt$. Le jour moyen astronomique, en un lieu quelconque, commencera au moment où ce Soleil fictif passera au méridien du lieu, absolument comme le jour solaire vrai commence au passage méridien du Soleil vrai.

De même, l'heure moyenne H_m sera l'angle horaire $\mathcal{AH}_m$ du Soleil moyen ou fictif à un instant donné, tandis que l'heure vraie H_v est l'angle horaire $\mathcal{AH}_v$ du Soleil vrai. Or, à une heure sidérale quelconque H_s, on a les deux relations :

Soleil vrai................ $\mathcal{AH}_v + \mathcal{AR}_v = H_s$
Soleil moyen.............. $\mathcal{AH}_m + \mathcal{AR}_m = H_s$

Donc

$$\mathcal{AH}_m - \mathcal{AH}_v = \mathcal{AR}_v - \mathcal{AR}_m.$$

En d'autres termes,

$$H_m - H_v = \text{Éq. du centre} + \text{Réd. à l'équateur.}$$

Cette somme de termes périodiques porte le nom d'*équation du temps*. D'après la relation précédente, on voit que l'équation du temps est ce qu'il faut ajouter à l'heure vraie pour avoir l'heure moyenne. On la trouve toute calculée, jour par jour, dans la *Connaissance des Temps*.

Les astronomes ont l'habitude, depuis des milliers d'années, de nommer *équation* ce qu'il faut ajouter à une partie proportionnelle au temps, ou *moyenne*, pour la compléter et avoir la valeur *vraie* d'une variable quelconque. Il y a ici une dérogation à cette habitude, puisque, au contraire, l'équation du temps doit être ajoutée à l'heure vraie pour avoir l'heure moyenne. Cela tient évidemment à ce que les $\mathcal{AH}$ se comptent en sens inverse des $\mathcal{AR}$.

Si l'équation du temps ne comprenait que les deux parties indiquées ci-dessus, la somme des valeurs qu'elle prend chaque jour serait nulle au bout d'une année. Par conséquent, dans ce laps de temps, la somme des jours vrais serait égale à la somme des jours moyens; en d'autres termes, le jour moyen serait la moyenne de tous les jours vrais d'une même année. Mais les astronomes y comprennent encore les très petites perturbations du mouvement de la Terre et la nutation. Ce sont là aussi des effets périodiques, mais à périodes bien plus longues que celles de l'équation du centre et de la réduction à l'équateur. Il est donc vrai que le jour moyen est encore la moyenne des jours vrais, non pas chaque année,

mais au bout d'une période beaucoup plus longue. Nous le substituerons au jour sidéral pour la mesure du temps (1).

L'équation du temps est nulle quatre fois par an. Ses maxima n'atteignent pas 17^m. Quant aux jours solaires vrais, leur durée varie entre $23^h 59^m 30^s$ et $24^h 0^m 21^s$. Tous les problèmes usuels que soulève la transformation d'un temps dans l'autre se résolvent aisément à l'aide de la *Connaissance des Temps*. Si nous désignons l'équation du temps à l'heure vraie H_v par e, et l'heure moyenne correspondante par H, on aura

$$H = H_v + e.$$

Si l'on veut connaître l'heure sidérale H_s qui répond à l'heure moyenne H, on aura

$$H_s = Æ_m + ÆH_m = Æ_m + H.$$

$Æ_m$ ou $L_0 + nt$ est donnée tous les jours pour midi dans la *Connaissance des Temps*. Elle augmente de $3^m 56^s,56$ par jour moyen. Il faut donc la calculer pour l'heure H au jour dit. Soit $(Æ_m)$ cette ascension droite du Soleil fictif pour midi moyen de ce jour; on aura, à l'heure H,

$$Æ_m = (Æ_m) + 3^m 56^s,56 \times \frac{H}{24^h} = (Æ_m) + 0,002738\,H,$$

et par suite

$$H_s = Æ_m + H = (Æ_m) + 1,002738\,H,$$

ce qui revient à ajouter, à l'Æ du Soleil moyen pour midi, temps moyen du lieu, l'heure H exprimée en heures sidérales. Nous renvoyons sur ce point le lecteur aux exemples donnés dans la *Connaissance des Temps*.

---

(1) La durée de l'année tropique est de 366,2422 jours sidéraux ou de 365,2422 jours solaires moyens : donc 1 jour solaire moyen vaut

$$\frac{366,2422}{345,2422} = 1^j,002738 = 24^h\, 3^m 56^s,56$$

en temps sidéral.

THÉORIE

DES

INSTRUMENTS DE MESURE.

Le matériel d'observation applicable en mer est très limité. Il se réduit au sextant, instrument destiné à mesurer les hauteurs ou les distances zénithales qui entrent dans les formules (*a*), (*b*), (*c*), et aux chronomètres ou montres marines, instruments destinés à fournir la mesure du temps et subsidiairement à conserver, autant que possible, l'heure de Paris pendant toute la traversée. La théorie de ces instruments a donc une grande importance pour le marin.

CHAPITRE VII.

LES CHRONOMÈTRES.

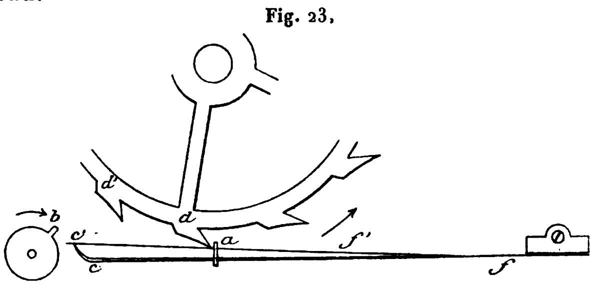
Les chronomètres ont même rouage que les montres ordinaires; ils n'en diffèrent que par les dimensions et l'échappement. Les dimensions sont beaucoup plus grandes; destinés à être toujours maintenus à plat, leur boîte en cuivre cylindrique est lestée de plomb et reliée à une boîte extérieure carrée en acajou par une suspension à la Cardan, comme celle des boussoles. Elles échappent ainsi aux grands mouvements du roulis ou du tangage, et par suite aux inégalités de marche que les horlogers connaissent sous le nom de *variation du plat*

au pendu. Au lieu de l'échappement à cylindre des montres vulgaires ou de l'échappement à ancre des bonnes montres, ils ont un système qui laisse presque constamment libre l'oscillation du régulateur. Celui-ci se compose d'un balancier et d'un ressort, comme dans les montres; mais le balancier est compensé pour les variations de température, et le ressort réglant est, non un spiral plat, mais un ressort en forme d'hélice. Quant à la force motrice, c'est toujours un ressort cylindrique enfermé dans un barillet; celui-ci communique avec le rouage par l'intermédiaire d'une chaîne d'acier et d'une fusée destinée à compenser la variation continuelle de force d'un ressort qui se détend.

Échappement libre à ressort.

En supposant que les oscillations du balancier autour de son axe soient bien isochrones lorsqu'il est libre, l'échappement doit être conçu de manière que le balancier, passant par sa position d'équilibre avec son maximum de vitesse, dégage une dent de la roue d'échappement, en levant un petit arrêt qui reviendra de lui-même à sa place. La roue d'échappement, devenant libre, tournera, sous l'action du moteur transmise par le rouage, de l'angle compris entre deux dents, et, la dent suivante rencontrant le petit arrêt, le rouage s'arrêtera de nouveau.

Fig. 23.



La *fig*. 23 représente le moment où la dent d, qui bute contre l'arrêt a, va être dégagée par l'action du régulateur, dont l'oscillation s'accomplit actuellement dans le sens de

la flèche. L'arrêt *a* est une petite pierre fine enchâssée dans un long ressort *cf*. Ce ressort est poussé vers le bas par un doigt *b* fixé à l'arbre du balancier; il entraîne l'arrêt *a* et dégage ainsi la dent *d* de la roue d'échappement, qui commence à tourner. Mais, lorsque le doigt *b* s'est éloigné, le ressort revient aussitôt en place et l'arrêt *a* est choqué par la dent suivante *d'*, qui se trouve arrêtée à son tour.

Il ne faut pas que, dans la seconde période de l'oscillation (de sens contraire à la flèche), le doigt *b* du balancier rencontre de nouveau la résistance du ressort *cf*. Pour cela, on recourbe celui-ci vers son extrémité *c* et on le recouvre d'un ressort beaucoup plus faible *c'f'* qui dépasse un peu le premier. Quand *b* vient dans le sens de la flèche, il agit sur ce petit ressort, qui appuie sur le grand et l'entraîne; quand *b* agi
dans le sens inverse, il ne rencontre que la très faibl
tance du petit ressort *c'f'* et le soulève, sans déranger

Ainsi une dent de la roue d'échappement passe à c
oscillation complète du balancier, et presque aussitôt l
suivante vient buter, avec un petit bruit sec, contre l'a

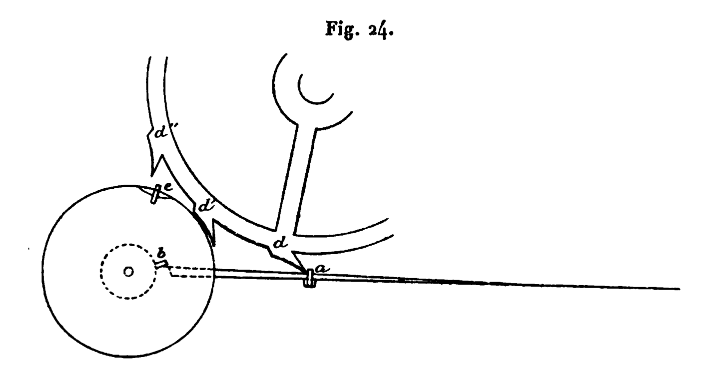
L'échappement doit remplir une seconde fonction,
de restituer au balancier la force vive qu'il perd à chaq
stant par les diverses résistances qu'il éprouve, de man
entretenir son mouvement oscillatoire. Pour cela, on fi
un disque porté par l'axe du balancier (*fig.* 24), da
plan même de la roue d'échappement, un petit taque
pierre dure destiné à recevoir le choc de la troisième d
au moment où, la dent *d* étant dégagée, la roue d'échapp
se met à tourner.

Lorsque *b*, qui commence à agir sur la détente, aura t
du petit angle nécessaire pour rendre libre la dent *d*, le
taquet *e* aura dépassé la dent *d''* et recevra un choc de
dent au moment où, la roue d'échappement étant dev
libre, la dent *d''* se trouvera animée d'une vitesse linéaire
grande que celle de *e*. A tout autre moment, la roue d'éc p-
pement étant fixée dans la position même de la figure, le taquet *e*, dont l'extrémité décrit une circonférence qui mord sur

celle de l'extrémité des dents, passera librement entre les dents d' et d''.

On voit que, si le chronomètre vient à s'arrêter, dans le cas, par exemple, où l'on aurait oublié de le remonter, il ne se remettra pas de lui-même en marche comme les montres ordi-

Fig. 24.



naires après avoir été remonté. Il faut, pour mettre le balancier en mouvement, obtenir un premier départ de l'arrêt *a*. Pour cela, on prend la boîte du chronomètre entre les mains et on lui imprime, avec précaution toutefois, un mouvement brusque de rotation suffisant pour dégager la dent *d*.

Évidemment la régularité de la marche exige l'isochronisme des oscillations du balancier. Comme ces oscillations varient d'amplitude par suite des résistances variables avec le temps du rouage et des pivots, qui diminuent peu à peu l'action de la force motrice, il faut que cet isochronisme ait lieu quelle que soit l'amplitude des oscillations. Heureusement il y a deux manières de réaliser cet isochronisme. La première a été découverte par Pierre Leroy, célèbre horloger français. Il a constaté qu'avec un ressort donné, en forme d'hélice cylindrique, on peut toujours, en le diminuant peu à peu de longueur, rencontrer à chaque spire une longueur telle que les grandes oscillations aient même durée que les petites.

La seconde manière de réaliser l'isochronisme sans toucher à la longueur du ressort est due à M. Phillips, professeur de Mécanique à l'École Polytechnique. Elle consiste à donner au

6

ressort, dans les deux parties où il dévie de la forme héli-çoïdale pour aller s'encastrer en haut dans le pont du balancier, en bas dans le corps du balancier lui-même, certaines formes géométriques que l'analyse fait connaître et que l'art réalise avec une grande perfection. Quand ces courbes terminales sont bien exécutées, les réactions que les parties encastrées exercent sur la lame se réduisent à un couple, et la figure du ressort, héli-coïdale à l'état de repos, reste encore hélicoïdale dans ses contractions et dilatations successives à l'état de mouvement. Le centre de gravité du spiral oscillant ne cesse pas de coïncider avec son axe. Enfin les réactions latérales des pivots sont nulles; en d'autres termes, les pivots n'ont aucune tendance à exercer une pression latérale contre leurs supports. Tous les chronomètres construits en Suisse le sont d'après ces principes.

Réglage des chronomètres.

Un chronomètre doit battre à très peu près 86400^s par jour solaire moyen. S'il en bat $86400 - m$, m est le retard diurne ou la marche diurne du chronomètre. Cette marche m doit toujours être réduite à un petit nombre de secondes. Pour obtenir ce résultat dans une horloge, on fait varier peu à peu la longueur l du pendule. En effet, la durée t d'une oscillation d'un pendule de longueur l est, en secondes de temps moyen,

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

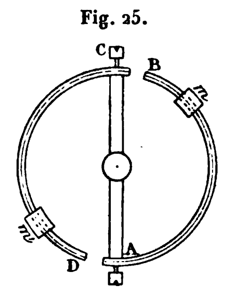
g étant l'intensité de la pesanteur au lieu considéré ; π est un nombre constant; g ne varie pas tant que le pendule reste au même lieu : il suffit donc d'agir sur l, de le raccourcir si l'horloge retarde, de l'allonger un peu si elle avance, jusqu'à ce qu'enfin m soit réduit au point jugé convenable. Cette opération est si simple, qu'il n'est pas besoin d'un horloger pour l'exécuter.

Quant aux chronomètres, la durée d'une oscillation est

$$\pi\sqrt{\frac{l\mathrm{I}}{\mathrm{E}}},$$

formule où l représente la longueur du spiral, E son moment d'élasticité, I le moment d'inertie du balancier. Dans les montres ordinaires se trouve une raquette qui permet d'al-

Fig. 25.



longer ou de raccourcir quelque peu le spiral, et par suite de faire varier l de manière à produire le même effet que sur le pendule. On parvient ainsi à régler une montre ordinaire et à réduire sa marche diurne au taux convenable. Mais, en agissant de même sur le spiral hélicoïdal d'un chronomètre, on altérerait, comme on l'a vu plus haut, l'isochronisme de ses oscillations; c'est donc sur le facteur I, moment d'inertie du balancier, qu'il faut opérer pour en faire varier quelque peu la durée. A cet effet, la barrette du balancier porte à ses deux bouts des vis à têtes très massives. En les faisant tourner délicatement à la fois (pour ne pas troubler l'équilibre du balancier), de manière à les rapprocher, par exemple, du centre des oscillations, I diminue et par suite aussi la durée de l'oscillation devient moindre. On réussit par là, au moyen de tâtonnements d'une grande délicatesse qui ne peuvent être confiés qu'à un homme de l'art, à annuler ou du moins à réduire la marche d'un chronomètre. Un astronome règle sa pendule quand il lui plaît; un marin ne doit jamais toucher à son chronomètre, excepté pour le remonter.

Influence de la température. — Compensation.

Mais ce réglage des pendules ou des montres ne compte que pour la température à laquelle on a opéré. A d'autres tempé-

ratures, ces instruments changent de marche comme les pendules, mais en vertu de causes bien différentes. Pour une horloge, lorsque la température augmente, l augmente aussi; comme c'est la seule quantité influencée, il suffit d'annuler l'effet de la température par l'artifice bien connu de la grille compensatrice. On rend ainsi l invariable à toute température. Dès lors une horloge dont le pendule est muni de cet appareil correcteur conserve la même marche l'hiver comme l'été, ou du moins ne varie plus qu'en vertu de causes tout à fait étrangères à la température. Il en est tout autrement des chronomètres; les trois facteurs l, I, E varient à la fois avec la température; l s'allonge quand celle-ci augmente; I augmente aussi, puisque les masses qui composent le balancier s'écartent du centre d'oscillation, et E, qui représente ici la force réglante et joue le même rôle que g dans les horloges, diminue. Il n'y a donc plus aucune analogie entre les montres et les horloges lorsqu'il s'agit de la compensation.

L'effet le plus considérable vient de l'élasticité du ressort, c'est-à-dire de la force régulatrice; son moment diminue à peu près de $\frac{1}{4000}$ pour 1° d'élévation de température. Comme E figure au dénominateur sous un radical dans l'expression précédente, l'augmentation de durée d'une oscillation sera, de ce chef, de $\frac{1}{8000}$; et comme il y a 86400 oscillations par jour exécutées sous l'action de cette force, le retard diurne dû à un seul degré d'augmentation de température sera d'une dizaine de secondes. Il s'en faut de beaucoup que la variation correspondante de l ou de I produise un effet pareil. C'est donc la diminution de E qu'il faut compenser avant tout, en diminuant le moment d'inertie dans une proportion bien plus grande que l'effet directement exercé sur le balancier par la dilatation de son anneau. On n'y parviendrait pas en opposant dilatation à dilatation comme dans la grille compensatrice des pendules; il faut recourir à une combinaison encore plus sensible à l'action de la chaleur. On l'a trouvée dans les lames formées de deux métaux soudés et inégalement dilatables; ces lames se courbent fortement sous la moindre impression de chaleur,

au point qu'on en a fait des thermomètres d'une sensibilité extrême.

L'anneau du balancier est coupé en deux points opposés, près de la barrette à laquelle sont fixées les extrémités des deux demi-anneaux. Il est formé de deux lames courbes soudées, l'une extérieure en laiton, l'autre intérieure en acier, et portant vers les extrémités libres deux petites masses m et m'. Lorsque la température croît, la courbure de ces lames augmente et les masses m, m' se rapprochent très sensiblement du centre. Le moment d'inertie diminue ainsi bien plus qu'il ne le faudrait pour compenser la dilatation de la barrette. Comme ces masses peuvent glisser chacune le long du demi-anneau qui la porte, l'horloger cherche, par un tâtonnement excessivement délicat, la position où il doit fixer ces masses pour compenser les variations des facteurs l et I, et surtout celle de E. Il opère successivement à deux températures très différentes, 0° et 30° par exemple, et déplace les masses compensatrices jusqu'à ce qu'il ait obtenu la même marche dans les deux cas.

Si l'on connaissait exactement la loi suivant laquelle E varie avec la température, on chercherait la forme qu'il faudrait donner au balancier pour compenser exactement les variations de E. Il suffirait, en effet, que les petits changements ΔI et ΔE produits par un même accroissement de température fussent proportionnels à I et à E. Le chronomètre, une fois compensé à deux températures extrêmes, le serait aussi pour toutes les températures intermédiaires. Malheureusement cette proportionnalité n'existe pas ou ne se réalise qu'accidentellement; il en résulte qu'entre 0° et 30° le chronomètre prendra en général du retard; au delà de 0° ou de 30° il prendra de l'avance, ou réciproquement. La compensation la mieux exécutée de cette manière laisse donc subsister une partie de l'influence de la chaleur que les horlogers appellent l'*erreur secondaire* et dont les marins doivent tenir compte avec le plus grand soin s'ils veulent tirer bon parti de leurs chronomètres. Par ce qui précède, on voit clairement que cette erreur secondaire offre un caractère régulier; c'est une fonction plus ou moins simple de deux qualités physiques

susceptibles d'être calculées. Il est vrai que la Mécanique et l'Analyse ne sont pas en état aujourd'hui d'en déterminer la loi *a priori*, en considérant la figure des pièces, leurs dilatations, les variations de leur élasticité; mais nous étudierons cette loi par la voie de l'expérience, méthode dont ce Livre présente plusieurs exemples.

CHAPITRE VIII.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE L'ERREUR SECONDAIRE.

Le chronomètre doit être débarrassé de son enveloppe et placé dans une étuve dont on fait varier à volonté la température. Lorsque la température de la première épreuve, 10° par exemple, est bien établie et maintenue constante pendant un temps suffisant, on détermine la marche diurne du chronomètre en le comparant à une pendule astronomique à plusieurs jours d'intervalle. On porte ensuite l'étuve à une température plus élevée, 15° par exemple, mais très graduellement, car une variation brusque aurait pour effet d'altérer la trempe ou l'élasticité du spiral. On détermine encore la marche à la température de 15° par de nouvelles comparaisons avec la pendule de l'observatoire. En opérant ainsi successivement à des températures bien connues, de 0° à 30° par exemple, on parcourt toute l'échelle des températures auxquelles l'instrument sera exposé dans le cours d'une campagne ordinaire. On s'assure d'ailleurs, en revenant aux températures initiales, que le chronomètre reprend bien les marches déjà observées, en sorte que le phénomène qu'on étudie n'est pas troublé par des influences étrangères.

Cela posé, pour découvrir la loi de ces variations, il suffit de construire la courbe des marches, en prenant pour abscisses les températures θ et les marches m pour ordonnées. On obtient

ainsi un certain nombre de points par lesquels on fera passer une ligne courbe, en s'attachant, non pas seulement à la continuité du trait, mais aussi à celle de la courbure. La figure de cette courbe sera la traduction géométrique de la loi cherchée. L'équation de cette courbe, si l'on parvient à en découvrir l'espèce, sera l'expression analytique de la loi.

On trouvera plus loin des tracés de ces courbes pour deux chronomètres différents. Ce sont de véritables paraboles ayant leur axe perpendiculaire à la ligne des abscisses. M. Lieussou, à qui nous devons cette importante découverte, a trouvé effectivement cette figure parabolique dans les courbes de marche de tous les chronomètres qu'il a étudiés. Or l'équation des paraboles ainsi placées par rapport aux coordonnées m et θ est de la forme

$$m = a + b\theta + c\theta^2$$

ou bien

$$m = \alpha + c(\theta - \tau)^2,$$

équation qui se confond avec la première si l'on pose

$$a = \alpha + c\tau^2, \quad b = -2c\tau.$$

La loi de l'erreur secondaire peut donc être énoncée ainsi : l'influence de la chaleur sur la marche d'un chronomètre est proportionnelle au carré de sa température, comptée à partir d'un certain degré du thermomètre. M. Lieussou a donné à ce degré le nom, peu usité aujourd'hui, de *température de réglage*. Depuis lors, cette loi a été vérifiée en tous pays pour tous les chronomètres convenablement étudiés ; elle est aujourd'hui universellement adoptée dans la pratique.

On parvient au même résultat par le calcul. Nous verrons, au Chapitre relatif à la *Connaissance des Temps,* qu'une fonction quelconque de θ, continue toutefois dans l'intervalle des valeurs dont l'argument θ est susceptible, peut être pratiquement remplacée par une série procédant suivant les puissances ascendantes de θ,

$$f(\theta) = f(0) + \theta f'(0) + \frac{\theta^2}{1.2} f''(0) + \frac{\theta^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots,$$

dont les coefficients sont les valeurs que prennent les dérivées successives de cette fonction inconnue pour $\theta = 0$; on les obtient par des formules très simples à l'aide des valeurs observées de la fonction et de leurs différences successives. Ces différences elles-mêmes indiquent à quel terme de cette série il convient de s'arrêter, car, les différences des divers ordres Δ', Δ'', Δ''' allant en décroissant, on s'arrête à celles dont la grandeur est négligeable, c'est-à-dire qui sont du même ordre de petitesse que les quantités dont l'observateur cesse de répondre.

Il est parfaitement légitime d'appliquer ce mode de développement à la fonction de θ qui doit représenter l'erreur secondaire, car celle-ci ne dépend que de l'élasticité du ressort et des dilatations du balancier, quantités qui, elles-mêmes, ne relèvent que de θ.

Si on l'applique aux marches d'un chronomètre observées à des températures équidistantes, on trouve aussitôt que les Δ''' sont négligeables et que l'on peut considérer les Δ'' comme constantes. Il suffit donc de prendre les trois premiers termes de la série et de calculer leurs coefficients par les formules du Chapitre susdit (h étant l'accroissement constant de l'argument θ)

$$f'(0) = \frac{1}{h}(\Delta'_0 - \tfrac{1}{2}\Delta''_0),$$

$$f''(0) = \frac{1}{h^2}\Delta''_0.$$

Pour montrer toute la simplicité de ces calculs, supposons l'exemple suivant :

θ.	Marches observées.	Δ'.	Δ''.
°	s		
— 10......	1,8		
		— 0,6	
— 5......	1,2		s
		— 0,2	+ 0,4
0......	1,0		+ 0,3
		+ 0,1	
+ 5......	1,1		+ 0,4
		+ 0,5	
+ 10......	1,6		+ 0,4
		+ 0,9	
+ 15......	2,5		+ 0,5
		+ 1,4	
+ 20......	3,9		+ 0,3
		+ 1,7	
+ 25......	5,6		+ 0,4
		+ 2,1	
+ 30......	7,7		

On en tire $f(0) = 1^s,0$, $\Delta'_0 = 0^s,1$, $\Delta''_0 = 0^s,4$ et

$$m = 1^s,0 + \tfrac{1}{5}(0^s,1 - 0^s,2)\theta + \tfrac{1}{25}0^s,2\theta^2,$$

ou bien

$$m = 1^s,0 - 0^s,02\theta + 0^s,008\theta^2,$$

ou encore

$$m = -0^s,92 + 0^s,008(\theta + 15^\circ,5)^2.$$

Lorsqu'il ne s'agit pas de vérifier l'existence de cette loi, mais de l'appliquer, on se contente de trois marches observées à des températures suffisamment distinctes. Si l'on a soin de choisir des températures équidistantes (Liverpool), le calcul des trois constantes α, c, τ est très simple. Soient m, m', m'' les trois marches observées aux températures équidistantes θ, θ', θ''. On aura les trois relations

$$\begin{aligned}
m &= \alpha + c\theta^2 - 2c\theta\tau + c\tau^2,\\
m' &= \alpha + c\theta'^2 - 2c\theta'\tau + c\tau^2,\\
m'' &= \alpha + c\theta''^2 - 2c\theta''\tau + c\tau^2.
\end{aligned}$$

Les deux différences premières donnent

$$\begin{aligned}
m' - m &= c(\theta' - \theta)(\theta' + \theta) - 2c\tau(\theta' - \theta),\\
m'' - m' &= c(\theta'' - \theta')(\theta'' + \theta') - 2c\tau(\theta'' - \theta').
\end{aligned}$$

La différence seconde donne

$$m'' - m' - (m' - m) = 2c(\theta' - \theta)^2,$$

en remarquant que $\theta' - \theta = \theta'' - \theta' = \frac{1}{2}(\theta'' - \theta)$.

Le coefficient c étant connu, on aura τ par

$$\tau = \frac{\theta' + \theta}{2} - \frac{m' - m}{2c(\theta' - \theta)}$$

et α par

$$\alpha = m - c(\theta - \tau)^2.$$

Ces formules reviennent d'ailleurs aux précédentes.

Si les observations de m ne répondent pas à des températures équidistantes, on pose des équations de condition de la forme

$$m = a + b\theta + c\theta^2,$$

équations linéaires à trois inconnues a, b, c, en nombre

quelconque, qu'on n'a pas besoin de traiter par la méthode des moindres carrés. La méthode employée autrefois par les astronomes suffit amplement et est bien plus expéditive. Elle consiste ici à prendre la moyenne de toutes les équations et à la retrancher de chacune d'elles pour éliminer a. On forme ensuite l'équation en b en ajoutant ces nouvelles équations après avoir simplement changé les signes de celles où le coefficient de b est négatif. On opère de même pour l'équation en c, et l'on n'a plus finalement qu'à résoudre deux équations à deux inconnues. Il est permis et même avantageux de ne tenir compte, dans la somme des équations, que de celles où le coefficient de l'inconnue qu'on a en vue est assez grand pour donner la valeur de l'inconnue avec une certaine précision. C'est là une question de tact dont on se tire aisément avec un peu d'habitude des discussions numériques.

Si les marches observées comprennent un grand espace de temps, et que le chronomètre paraisse affecté d'une petite accélération, il faudra introduire dans la formule précédente un terme dépendant du temps et écrire

$$m = a + b\theta + c\theta^2 + dt;$$

mais on évite cette quatrième inconnue en la déterminant à part, ainsi que nous le ferons tout à l'heure pour les deux derniers exemples. On verra, par ces exemples, que le calcul des coefficients et la vérification des équations de condition sont l'affaire de quelques instants.

Variations de la marche avec le temps.

Cette seconde question, bien plus compliquée que la première, est restée sans solution ; jamais on n'a pu y découvrir une loi quelconque. On sait seulement que les chronomètres neufs présentent, en général, une accélération notable qui diminue de semaine en semaine ou de mois en mois et fait place finalement à un régime plus ou moins stable. Mais ce régime lui-même est troublé fréquemment par des pertur-

bations inexplicables; celles-ci durent un certain temps, puis disparaissent et sont remplacées par d'autres de même sens ou de sens contraire. Même dans les armoires d'un observatoire, à l'abri des changements de température, des secousses, des mouvements gyratoires, des poussières, des émanations délétères, les chronomètres sont bien loin de marcher avec la régularité des pendules. On attribue, en général, ces variations à l'épaississement irrégulièrement progressif des huiles qui s'oxydent en vieillissant. L'état des huiles joue effectivement un rôle dans les perturbations des chronomètres, car chaque fois qu'on les renouvelle (sans toucher aux vis réglantes ni aux masses compensatrices) la marche change brusquement. Mais comment s'opère cette réaction, c'est ce que l'on ignore tout à fait. Sans doute l'épaississement des huiles fait obstacle à la force motrice qui doit maintenir les oscillations du balancier dans une amplitude à peu près constante. On constate, en effet, une diminution progressive dans cette amplitude à mesure que les huiles vieillissent; mais l'isochronisme du spiral a dû remédier d'avance à cet effet. Quelques constructeurs laissent, il est vrai, pour des raisons de métier, subsister un petit défaut d'isochronisme tel que les oscillations décroissent quelque peu en durée en décroissant d'amplitude, mais on voit ces chronomètres prendre néanmoins du retard quand les huiles sont trop vieilles. Il y a donc là d'autres causes en jeu, par exemple l'usure plus ou moins régulière des parties frottantes. Cette usure s'opère, même sur les pierres les plus dures ou les pivots les mieux trempés, sous l'influence des mouvements alternatifs du balancier et des chocs de l'échappement qui se répètent deux ou trois cent mille fois par jour.

Ces causes échappent à toute analyse; elles échappent même au constructeur, car, si on lui remet un chronomètre qui a présenté des anomalies, il a beau démonter l'instrument et en étudier les diverses pièces à la loupe, il lui est le plus souvent impossible de s'en rendre compte. Il sait seulement que pour les éviter il faut des matériaux de choix, un travail soigné, un réglage minutieux.

En mer, de nouvelles causes concourent avec les premières pour altérer les marches : ce sont les chocs des vagues, les vibrations du propulseur, les balancements en partie gyratoires du roulis et du tangage auxquels on ne remédie qu'incomplètement par la suspension à la Cardan, enfin les émanations oxydantes ou sulfurantes de la cale ou de l'entre-pont.

S'il n'y avait que l'influence des huiles, comme leur viscosité dépend du temps qui amène peu à peu l'oxydation, et de la température qui les fluidifie ou les épaissit alternativement, on pourrait à la rigueur considérer la marche d'un chronomètre comme une fonction inconnue de ces deux variables : t, âge des huiles, et θ, température du chronomètre. Alors, en remplaçant cette fonction par son développement en série suivant les puissances ascendantes et les produits de t et de θ, on n'aurait plus qu'à reconnaître le nombre de termes sensibles et à en déterminer les coefficients, ainsi qu'on l'a fait avec un plein succès pour l'erreur secondaire où θ intervient seul; mais, pour l'influence du temps, on n'a jamais trouvé ainsi la moindre loi. A chaque nouveau laps de temps il faudrait introduire dans la série des termes différents et donner aux coefficients des termes conservés d'autres valeurs.

En examinant la question par le procédé graphique et en prenant cette fois le temps pour abscisse, M. Lieussou avait cru reconnaître que la marche d'un chronomètre placé dans une armoire, à terre, et corrigé du terme $c(\theta - \tau)^2$, était généralement représentée par une droite peu inclinée sur l'axe des abscisses. Cela revenait à réduire la série précédente aux deux premiers termes

$$a + dt;$$

mais il n'y a pas là de loi proprement dite. En effet, un bon chronomètre, soustrait à une partie des influences qui en modifient le fonctionnement, ne présente dans sa marche, pendant quelques semaines, que des inflexions peu caractérisées; par suite, on peut substituer, à une partie restreinte de la courbe des marches, une tangente ou une simple corde sans produire de discordance notable; mais, comme on ignore absolument

quelle forme la courbe prendra plus loin, cette représentation élémentaire ne compte que pour la partie observée et ne s'étend pas du tout à des époques ultérieures. Il ne faut donc pas confondre les deux parties de la formule de Lieussou, c'est-à-dire

$$a + dt \text{ et } c(\theta - \tau)^2;$$

la seconde partie représente une loi réelle; la première ne représente rien.

Cependant il est un cas où ce terme *dt* acquiert une certaine importance : c'est celui où l'on est forcé de se servir d'un chronomètre neuf présentant une accélération notable. Si celle-ci décroît rapidement, on serait même conduit à la formule

$$a + dt + et^2;$$

mais c'est là un effet purement transitoire et exceptionnel, car on évite ordinairement d'employer des chronomètres affectés de ce défaut. Cette accélération, d'ailleurs, n'empêcherait pas d'autres anomalies de se produire. Telles sont les questions que nous allons étudier expérimentalement sur quelques chronomètres de choix.

CHAPITRE IX.

ÉTUDE D'UN CHRONOMÈTRE DE LA MARINE MARCHANDE ANGLAISE.

Le n° 1656 de G. Timewell a été pris en 1874 à l'observatoire de la marine de Liverpool et embarqué sur le *British Sceptre* (¹). A chaque voyage il a été reporté à l'observatoire, et l'on y a déterminé chaque fois les constantes de la correction

(¹) *Monthly Notices of the Royal astronomical Society*, vol. XXXIX, 1879, p. 325.

thermométrique par des expériences faites aux températures équidistantes de 55°, 70° et 85° F. Prenons d'abord les épreuves qui ont servi en 1877 à déterminer ces constantes :

Dates.	Dates 1877.	Marche diurne.	Température.
	j	s	
1877. Mars 10-17....	71,5	— 0,95	85° F.
17-24....	78,5	— 0,05	70
24-31....	85,5	— 0,60	55
31- 7....	92,5	+ 0,65	70
Avril 7-14....	99,5	— 0,12	85
14-21....	106,5	+ 0,33	70
21-28....	113,5	— 0,17	55
28- 5....	120,5	+ 0,78	70
Mai 5-12....	127,5	+ 0,15	85
12-19....	134,5	+ 0,80	70

Les marches observées à une même température présentent bien une petite accélération avec le temps; mais, grâce à l'alternance des épreuves aux diverses températures, l'influence de cette accélération, en la supposant proportionnelle au temps, s'élimine dans la comparaison des moyennes, car celles-ci se trouvent répondre à peu près à la même date :

Dates.	$\theta = 85°$.	Dates.	$\theta = 70°$.	Dates.	$\theta = 55°$.
	s		s		s
1877. 71,5..	— 0,95	1877. 78,5..	— 0,05	1877. 85,5..	— 0,60
99,5..	— 0,12	92,5..	+ 0,65	113,5..	— 0,17
127,5..	+ 0,15	106,5..	+ 0,33	Moy. 99,5..	— 0,39
Moy. 99,5..	— 0,31	120,5..	+ 0,78		
		134,5..	+ 0,80		
		Moy. 106,5..	+ 0,50		

La correction de la température se déduira donc, par les formules précédentes, des trois résultats suivants :

θ.	m.	Δ'.	Δ''.
°	s		
55.....	— 0,39	s + 0,89	
70.....	+ 0,50		s — 1,70
85.....	— 0,31	— 0,81	

On en tire

$$c = \frac{-1^s,70}{450} = -0^s,00378, \quad \tau = \frac{55° + 70°}{2} - \frac{0,89}{2c.15} = 70°,35.$$

L'observatoire de Liverpool donne

$$a = +\,0^s,50,\quad c = -\,0^s,0037,\quad \tau = 70^\circ.$$

Ce sont les nombres que nous adopterons.

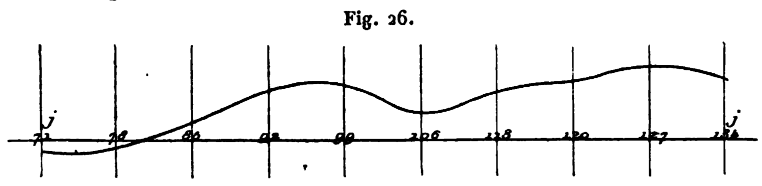
Pour étudier l'effet du temps, il faut corriger les marches précédentes de l'effet de la température. Il suffira d'ajouter à celles qui répondent à 55° et à 70° la correction

$$0^s,0037 \times \overline{15}^2 = 0^s,83.$$

	Dates.	Marches à 70°.	Δ'.	Δ''.
1877.	71,5....	$-\,0^s,12$		
			$+\,0^s,07$	
	78,5....	$-\,0,05$		$+\,0^s,21$
			$+\,0,28$	
	85,5....	$+\,0,23$		$+\,0,14$
			$+\,0,42$	
	92,5....	$+\,0,65$		$-\,0,36$
			$+\,0,06$	
	99,5....	$+\,0,71$		$-\,0,44$
			$-\,0,38$	
	106,5....	$+\,0,33$		$+\,0,71$
			$+\,0,33$	
	113,5....	$+\,0,66$		$-\,0,21$
			$+\,0,12$	
	120,5...	$+\,0,78$		$+\,0,08$
			$+\,0,20$	
	127,5....	$+\,0,98$		$-\,0,38$
			$-\,0,18$	
	134,5....	$+\,0,80$		

Si les marches ainsi ramenées à 70° pouvaient être représentées par une expression de la forme $a + dt$, les différences premières seraient constantes (et égales à d en prenant l'intervalle constant de sept jours pour unité de temps). Évidemment il n'en est pas ainsi. En adoptant l'expression $a + dt + et^2$, il faudrait que les différences secondes fussent constantes, ce qui n'a pas lieu non plus. On voit bien d'ailleurs, par l'épure de ces marches, que leur courbe est loin d'être une ligne droite ou une parabole.

Fig. 26.



Aussi le capitaine du *British Sceptre* s'est-il contenté de la dernière marche $+\,0^s,80$ et de la correction fournie par l'ob-

servatoire $-0^s,0037(\theta - 70^\circ)^2$. Voici les résultats obtenus pendant un voyage de quinze mois :

Dates.				Erreurs du chronomètre.	Déterminées par :
			j	s	
1877.	Juin	20,	170...	0,0	Boule-signal de Londres.
	Sept.	24,	266...	+ 5,7	Boule-signal de Melbourne.
	Nov.	15,	318...	+ 32,9	Boule-signal de Melbourne.
1878.	Févr.	11,	406...	+ 49,5	A Gobaulpore, trois étoiles à l'horizon artificiel.
	Févr.	25,	420...	+ 43,8	A Gobaulpore, six étoiles à l'horizon artificiel.
	Mars	13,	436...	+ 48,9	A Bimlipatam, six étoiles à l'horizon artificiel.
	Juillet	3,	548...	+ 57,6	Boule-signal de Sainte-Hélène.
	Sept.	19,	626...	+ 12,8	Start-Point, ☾ et ☉ à l'horizon de la mer.

Naturellement on corrige la marche précédemment adoptée chaque fois qu'on obtient à terre l'erreur absolue du chronomètre. Ainsi, le 24 septembre, cette erreur étant de $5^s,7$, la marche adoptée $0^s,80$ doit être portée à $0^s,80 + \frac{5^s,7}{96} = 0^s,86$, et ainsi de suite. Le chronomètre 1656 Timewell a donné ainsi les longitudes d'atterrissage à quelques milles près dans tout le cours du voyage, excepté au retour, car, à partir du 4 août, il s'est mis à retarder d'une seconde par jour et a donné une longitude tout à fait erronée. Il est facile de calculer, d'après les nombres précédents, les marches moyennes à la mer. On trouve ainsi :

Dates.		*m*.
	j	s
1877.	218.....	0,86
	292.....	1,38
	362.....	1,57
	413.....	1,16
	428.....	1,48
	492.....	1,56
	585.....	0,56

Remis à l'observatoire de Liverpool, il y a repris à très peu près sa marche de départ $+0^s,73$. Un peu plus tard, le con-

structeur de l'instrument a renouvelé les huiles sans toucher aux masses compensatrices et aux vis de réglage. Il a bien trouvé les huiles un peu détériorées, mais il n'a rien remarqué qui expliquât l'anomalie que ce chronomètre a présentée à partir du 4 août.

D'ailleurs, avant cette opération, l'observatoire avait déterminé de nouveau les constantes c et τ de la correction thermométrique et trouvé

$$a = 0^s,73, \quad c = 0^s,0034, \quad \tau = 75^\circ,4.$$

Les petites différences que ces constantes présentent avec les nombres précédemment obtenus avant le départ n'expliquent pas non plus les variations de marche dont il s'agit ici. Du reste, voici le Tableau de ces constantes déterminées à diverses reprises pendant quatre ans (¹) :

Dates des épreuves.		*a.*	*c.*	*τ.*
		s	s	o
Août et septembre.....	1874...	—0,08	—0,0051	71,3 chron. neuf.
Avril..................	1876...	—0,63	—0,0035	70,3
Mars, avril, mai.......	1877...	+0,50	—0,0037	70,0
Octobre et novembre..	1878...	+0,73	—0,0034	75,4
Novembre et décembre.	1878...	—0,88	—0,0037	68,7 (²)

Il résulte de cette étude quelques conséquences importantes. En premier lieu, la correction thermométrique a une remarquable stabilité. Les nombres précédents en font foi, du moins si on laisse de côté la première détermination de c à l'époque où l'instrument, sortant des mains de l'horloger, avait une accélération considérable dont il n'aura pas été suffisamment tenu compte dans le calcul de l'erreur secondaire. Le renouvellement des huiles n'en altère pas notablement le caractère. Quant aux causes inconnues qui produisent avec le temps des anomalies de marche, des perturbations en un mot, elles sont sans action sensible sur c et τ.

(¹) Le coefficient c est très petit. Le deuxième chronomètre du *British Sceptre* en avait un bien plus grand, d'environ $0^s,04$.

(²) Après renouvellement des huiles.

Il nous reste à examiner de plus près l'effet du temps. Quand il ne s'agit que d'une portion restreinte de la courbe des marches avec le temps, on la représentera toujours un peu mieux en lui substituant une corde de la courbe que si l'on attribuait aux marches une valeur constante. Mais la question est de savoir si l'expression $m = a + dt$, appliquée aux marches délivrées de l'erreur secondaire, sera de quelque utilité au delà de la portion considérée de cette courbe et continuera plus loin à la représenter passablement. On trouve ainsi

$$m = 0^s,50 + 0^s,012(t - 103^j).$$

Les observations employées sont représentées de la manière suivante :

Dates.	Marches à 70°.	Formule.	Calc. — obs.
	s	s	s
1877. 71,5......	— 0,12	+ 0,12	+ 0,24
78,5......	— 0,05	+ 0,20	+ 0,25
85,5......	+ 0,23	+ 0,29	+ 0,06
92,5......	+ 0,65	+ 0,38	— 0,27
99,5......	+ 0,71	+ 0,46	— 0,25
106,5......	+ 0,33	+ 0,54	+ 0,21
113,5......	+ 0,66	+ 0,63	— 0,03
120,5......	+ 0,78	+ 0,72	— 0,06
127,5......	+ 0,98	+ 0,80	— 0,18
134,5......	+ 0,80	+ 0,88	+ 0,08

Mais le 20 juin la marche serait $1^s,30$, au lieu de $0^s,80$ que le capitaine du ***British Sceptre*** a acceptée à cette date pour marche de départ. Les autres marches seraient encore plus mal représentées. Au lieu des marches précédemment déduites des observations :

Dates.	Marches observées.	On aurait par la formule :
j	s	s
1877 + 218......	0,86	1,88
292......	1,38	2,77
362......	1,57	3,61
413......	1,16	4,22
428......	1,48	....
....	....	....

On peut se rendre compte autrement du peu de valeur de la dernière formule. Les corrections que le capitaine du *British Sceptre* a dû appliquer au chronomètre pour en déduire l'heure de Greenwich ont pour expression (du cent-soixante-dixième au deux-cent-soixantième jour par exemple)

$$-(0^s,80\,t + \Sigma \text{ corr. therm.}),$$

en comptant t à partir du cent-soïxante-dixième jour. D'après la formule en t elles auraient dû être

$$-(1^s,30\,t + 0^s,006\,t^2 + \Sigma \text{ corr. therm.}).$$

La différence est $-(0^s,50\,t + 0^s,006\,t^2)$ (¹), qu'il faut retrancher de l'heure obtenue à bord le 24 septembre. Comme $t = 96^j$, cette différence s'élève à $103^s,3$. Il en résulte que l'erreur du chronomètre, au lieu d'être ce jour-là de $+5^s,7$, aurait été de $-97^s,6$.

On voit par là combien il serait imprudent d'employer la formule $a + dt$ au delà de l'intervalle de temps pour lequel les constantes a et d ont été obtenues. Cela tient à ce qu'il n'y a pas de loi assignable pour les variations qu'un chronomètre subit dans la suite des temps. Sauf le cas où un chronomètre neuf présente une accélération très décidée et bien supérieure aux perturbations ordinaires, le mieux est d'employer dans tout le cours d'une traversée la dernière marche obtenue avant le départ.

(¹) C'est l'intégrale de $(0^s,50 + 0^s,012\,t)dt$ avec une constante nulle.

CHAPITRE X.

MÉTHODES SUIVIES EN FRANCE POUR L'ÉTUDE DES CHRONOMÈTRES.

On vient de voir qu'en Angleterre l'observatoire de Liverpool fournit, pour chaque chronomètre, avant le départ, les constantes de la formule thermométrique

$$\alpha + c(\theta - \tau)^2,$$

et que le *time-ball* du port donne le retard absolu. La conduite des chronomètres à bord est donc aussi simple que sûre. A la marche de départ α on ajoute chaque jour la correction thermométrique; de jour en jour on retranche cette marche ainsi obtenue de l'état absolu précédent et l'on a ainsi, par le plus simple calcul, l'heure de Paris à un instant quelconque. A la première relâche on obtient un nouvel état absolu indépendant de tout ce qui précède, et cet état fournit à son tour, s'il y a lieu, une nouvelle marche par comparaison avec celui du départ. La seule difficulté qui puisse subsister est la possibilité d'un dérangement notable dans le cours d'une traversée. C'est ce qui a eu lieu au retour du *British Sceptre*. Mais cet inconvénient est inhérent à l'emploi des chronomètres; il n'y a qu'un moyen d'y remédier : c'est de recourir de temps en temps aux distances lunaires.

En France, au contraire, rien n'est organisé pour déterminer d'avance la correction thermométrique des chronomètres dans un observatoire spécial comme celui de Liverpool. Ce sont les marins eux-mêmes qui doivent se livrer à cette étude. Comme ils n'ont ni observatoire ni étuve, ils sont bien forcés d'y procéder à bord et même en voyage. De là des inconvénients dont la gravité n'échappera pas au lecteur. Il y a deux cas à

distinguer : celui où le navire reste très longtemps en rade, ayant à bord ses chronomètres et l'officier qui en est chargé ; nous allons voir, par deux exemples, comment on vient à bout, dans ce cas, de déterminer la correction due à la température de manière à utiliser les chronomètres dès qu'on prend la mer ; le second cas est celui où l'on prend le large sans avoir pu recueillir les données nécessaires.

Examinons d'abord le second cas, qui n'est malheureusement pas rare. Voici les préceptes qu'on donne pour ce cas dans un Ouvrage tout récent, où la question actuelle est très amplement traitée [1] :

« Les constantes autres que celles de la marche se rectifient ou même s'établissent, si elles n'ont pu l'être avant l'appareillage, en employant à cet effet les marches déduites de la comparaison des états absolus de départ et d'arrivée, défalcation faite des sauts d'état absolu qui ont pu se produire pendant la traversée.... Il serait difficile de tracer des règles générales, surtout pour la manière de se procurer des données. Si l'on vient à prendre le large inopinément, et qu'on n'ait, outre un état absolu et une marche de départ, que des données très incomplètes, on pourra, selon les circonstances, tirer parti de ces données en se reportant aux remarques suivantes.

» On doit d'abord se rappeler que la plupart des chronomètres retardent aux températures extrêmes et ont une marche maximum entre 10° et 20°. *On aura de la sorte une base sur laquelle il y aura moyen de se guider pour la première traversée.*

» Si l'on part de France en été, que le chronomètre ait une température de réglage et qu'elle soit assez basse, on appliquera sans inconvénient, pour commencer, la règle des variations de marche proportionnelles aux changements de température.

» Quand on part pour les pays chauds, on peut être à peu près certain, avec des chronomètres qui ne sont pas neufs, de

---

[1] LEDIEU, *Nouvelles méthodes de Navigation*, p. 324.

voir la marche retarder graduellement jusqu'à ce qu'elle ait diminué de deux ou trois secondes, en arrivant aux températures de 27° ou de 30°. La comparaison des montres dont on dispose indiquera d'ailleurs si l'une d'entre elles a pris de l'accélération.

» Il importe de ne pas oublier que, dans la pratique ordinaire de la navigation, avec la durée des traversées actuelles, nos chronomètres sont assez bons pour faire suffisamment bien atterrir sans que les constantes de température et de l'âge des huiles aient besoin d'être très rigoureuses. Dès lors on arrivera bien vite, au bout de quelques relâches, à fixer pour chacune des constantes en question une valeur suffisamment exacte. Pour plus de sûreté, on s'assurera si la formule ainsi trouvée rend compte, dans une certaine mesure, des écarts observés au concours du Dépôt, lorsque toutefois celui-ci aura fourni les indications nécessaires à cet égard. »

Nous nous dispenserons d'indiquer les procédés analogues par lesquels on s'efforce de tirer parti graphiquement de données incomplètes pour obtenir des valeurs plus ou moins incertaines de la marche des chronomètres. Mais nous devons donner quelques mots d'explication pour faire comprendre au lecteur comment il se fait que nos marins soient ainsi livrés à eux-mêmes dans une question si capitale pour la navigation dite *nouvelle* ou *chronométrique*.

Depuis de longues années, un concours permanent est ouvert au Dépôt de la Marine, à Paris, en vue de stimuler les progrès de l'horlogerie de précision. C'est sur les observations de nombreux chronomètres étudiés avec soin, en vue de ce concours, que l'ingénieur hydrographe Lieussou a découvert, il y a trente-cinq ans, la loi de l'erreur secondaire, si bien utilisée depuis à Liverpool. A la suite de cette belle découverte, le Dépôt s'était chargé autrefois de communiquer aux officiers chargés des montres la formule de correction pour chaque chronomètre embarqué sur un navire de l'État. Malheureusement on a renoncé à cette excellente pratique, qui constituait à elle seule un très grand progrès, précisément à l'époque où les

marchands anglais se l'assimilaient pour leur propre compte. Voici pourquoi.

La formule originaire de M. Lieussou,

$$m = a + b\theta + c\theta^2 + dt$$

ou bien

$$m = \alpha + c(\theta - \tau)^2 + dt,$$

contenait deux parties bien différentes, ainsi que cela ressort de la discussion précédente, à savoir le terme dt, relatif au temps ou à l'âge des huiles, qui ne signifie rien de précis, et le terme $c(\theta - \tau)^2$, qui exprime une loi très réelle. Prise d'abord dans son entier sans qu'on ait fait cette distinction capitale, cette formule se montra souvent en défaut; les officiers des montres perdirent toute confiance dans les résultats qu'on leur expédiait; des plaintes nombreuses parvinrent au Dépôt, et nos savants hydrographes, découragés, finirent par renoncer à fournir des documents si souvent démentis par l'expérience. C'est ainsi que les officiers chargés des montres se sont trouvés investis du soin de se tirer d'affaire avec leurs propres ressources.

Mais ces difficultés tenaient uniquement à la coexistence de deux termes, dont l'un ne mérite aucune confiance, tandis que l'autre représente une correction aussi vraie qu'elle est nécessaire. Qu'on réduise la formule de Lieussou au terme

$$c(\theta - \tau)^2,$$

et la difficulté disparaîtra. C'est précisément ce qu'on a fait à Liverpool.

Nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, à examiner ce qu'on fait en France quand le navire reste très longtemps en rade avant le départ, ayant à bord les montres et l'officier qui en est chargé. Alors il est possible de déterminer avec une certaine précision les éléments indispensables, par des procédés, il est vrai, beaucoup plus longs et moins sûrs que ceux dont nous avons donné plus haut la description.

Ces procédés, disons-nous, sont plus longs, car, nos marins

n'ayant pas d'étuves, il leur faut attendre que la vicissitude des saisons amène dans l'armoire des chronomètres une variation d'au moins une dizaine de degrés; moins sûrs, car ce sera de ces 10° de variation seulement qu'il faudra conclure les constantes c et τ, tandis qu'avec une étuve on opérerait sur une variation triple; plus longs, car au lieu d'opérer sur des variations équidistantes, ce qui réduit le calcul à quelques lignes, on opère sur des températures quelconques, ce qui exige l'emploi de la méthode des équations de condition; moins sûrs, car, en réunissant des données espacées sur un grand intervalle de temps, les perturbations chronométriques ne manquent guère de se produire. D'ailleurs la température des armoires, lue une fois par jour, doit être moins exactement connue que celle d'une étuve bien organisée.

Étude de deux chronomètres de la marine militaire en France.

Prenons pour premier exemple le n° 462 Winnerl, qui a été longtemps observé à terre par M. de Magnac avant d'être placé à bord de la frégate à hélice *la Victoire*. θ désigne ici la température comptée à partir de 22°,1 C. Voici les données :

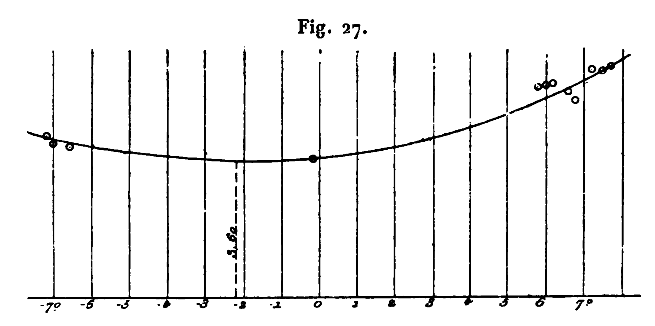
Dates.	Marches.	θ.	Marches ramenées au 181 mars.
	s	o	s
1865. Mars 4...	2,93	— 0,2	3,69
37...	3,56	— 7,0	4,18
47...	3,76	— 7,2	4,34
57...	3,56	— 6,6	4,09
84...	5,11	+ 6,2	5,53
95...	5,12	+ 5,8	5,48
105...	5,06	+ 6,5	5,39
115...	4,89	+ 6,6	5,17
129...	5,91	+ 7,8	6,13
140...	6,00	+ 7,8	6,18
154...	5,93	+ 7,6	6,05
165...	5,92	+ 7,3	5,99
181...	5,51	+ 6,0	5,51

La formule de Lieussou devient ici

$$m = a + b\theta + c\theta^2 + dt.$$

Pour ne pas avoir quatre inconnues à traiter à la fois, nous déterminerons d par la moyenne de celles des 84 et 95 mars comparée à celle du 181 mars, parce qu'elles répondent à la même température de 6°,0. L'accélération étant de $0^s,4$ en $91^j,5$, $d = +0^s,0043$. Ajoutons à chaque marche observée $0^s,0043(181^j - t)$, t désignant les dates ci-dessus; nous les ramènerons toutes au 181 mars. Les marches de la dernière colonne ne seront donc plus affectées que de l'erreur thermométrique. L'épure ci-jointe donne la courbe de cette erreur;

Fig. 27.



les abscisses sont les valeurs de θ; les ordonnées représentent les marches. Bien que les données ne comptent guère que pour cinq points distincts, la forme parabolique signalée par Lieussou s'y dessine passablement. L'abscisse du sommet est $-2°,3$ et l'ordonnée est $3^s,60$.

Pour une flèche de 0,8 on trouve sur l'épure une corde de 11,2; on aura donc, pour la constante de l'équation $y^2 = 2px$,

$$p = \frac{\overline{5,6}^2}{1,6} = 19,6.$$

Dès lors l'équation de la parabole rapportée aux axes de l'épure sera

$$(\theta + 2°,3)^2 = 39,2(m - 3^s,60),$$

ce qui donne

$$m = 3^s,74 + 0^s,117\theta + 0^s,0255\theta^2.$$

Il vaut mieux opérer numériquement par la méthode des équations de condition. Ici nous réduirons beaucoup le nombre de ces équations en prenant la moyenne des marches dont les températures sont comprises entre $-7°,2$ et $-6°,6$, entre $+5°,8$ et $+6°,6$, entre $7°,3$ et $7°,8$. Les équations réellement distinctes seront

$$\begin{aligned} 3^{s},69 &= a - 0,2b, \\ 4,20 &= a - 6,9b + 47,6c, \\ 5,42 &= a + 6,2b + 38,4c, \\ 6,09 &= a + 7,6b + 57,8c, \end{aligned}$$

et même, en remplaçant les deux dernières par leur moyenne, on obtient immédiatement

$$c = 0^{s},0264, \quad b = 0^{s},112, \quad a = 3^{s},71.$$

Par suite

$$m = 3^{s},71 + 0^{s},112\theta + 0^{s},0264\,\theta^2,$$

θ étant compté à partir de $22°,1$. Cette formule revient à

$$m = 3^{s},59 + 0^{s},0264(\theta - 20°)^2,$$

θ étant compté comme d'ordinaire à partir de $0°$. Elle représente les observations de la manière suivante :

Marches observées.	Marches calculées.	Calcul moins observation.
s 3,69	s 3,69	0 0
4,18	4,22	+ 0,04
4,34	4,28	— 0,06
4,09	4,11	+ 0,02
5,53	5,40	— 0,13
5,48	5,23	— 0,25
5,39	5,54	+ 0,15
5,17	5,58	+ 0,41
6,13	6,18	+ 0,05
6,18	6,18	0
6,05	6,07	+ 0,02
5,99	5,92	— 0,07
5,51	5,31	— 0,20

Il faut maintenant réduire en Tables la correction thermométrique $+0^s,0264(\theta - 20^\circ)$:

θ.	Correction.	θ.
°	s	°
20	+ 0,00 +	20
19	0,03	21
18	0,11	22
17	0,24	23
16	0,42	24
15	0,66	25
14	0,95	26
13	1,29	27
12	1,69	28
11	2,14	29
10	2,64	30

Si la marche adoptée pour la température de 20° est α, celle qui conviendra à la température de 27°, par exemple, sera $\alpha + 1^s,29$.

Voici un second exemple pris dans une brochure du même officier (M. de Magnac); θ est compté à partir de 22°,7 :

Dates.	Marches observées.	θ.
j	s	°
0.....	2,94	— 0,9
43.....	3,71	— 7,8
80.....	5,11	+ 5,5
101.....	5,05	+ 5,9
125.....	5,91	+ 7,1
149.....	5,93	+ 7,0
182.....	5,68	+ 5,2
243.....	3,84	+ 1,2
307.....	3,35	— 4,5
336.....	4,11	+ 1,5

Pour calculer le petit terme proportionnel au temps, il faut obtenir tout d'abord une évaluation approximative de la correction thermométrique. Nous la déduirons des trois premières observations, elles donnent

$$b = +0^s,18, \quad c = 0^s,033.$$

Avec ces valeurs, nous ramènerons à $\theta = 0$ les observations suivantes :

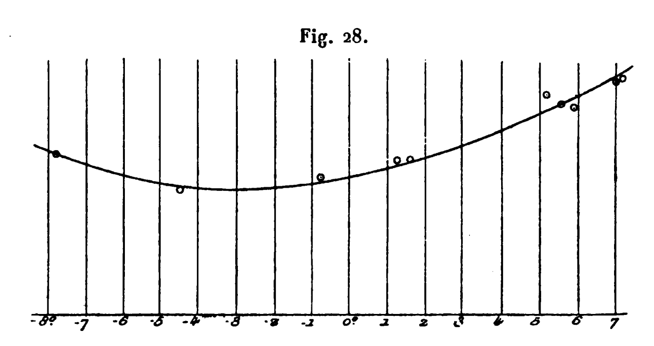
t.	m.
j	s
0	3,08
243	3,58
336	3,78

On en tire $d = 0^s,0021$. Ramenons à la dernière date les marches ci-dessus au moyen du terme $0^s,0021\,t$; nous aurons le Tableau suivant, où les marches ne sont plus affectées que de l'erreur thermométrique :

Marches.	θ.
s	o
3,65	— 0,9
4,31	— 7,8
5,65	+ 5,5
5,55	+ 5,9
6,35	+ 7,1
6,32	+ 7,0
6,00	+ 5,2
4,04	+ 1,2
3,41	— 4,5
4,11	+ 1,5

L'épure ci-jointe montre assez bien la figure parabolique de la courbe des marches, sauf certaines anomalies qu'on retrouvera dans le calcul de la formule.

Fig. 28.



On ne peut guère tirer de ces dix observations que les six

équations de condition suivantes :

$$\begin{aligned}
a - 0{,}9b + 0{,}8c &= 3^{s}{,}65,\\
a - 7{,}8b + 60{,}8c &= 4{,}31,\\
a + 5{,}5b + 30{,}2c &= 5{,}73,\\
a + 7{,}0b + 49{,}0c &= 6{,}34,\\
a + 1{,}3b + 1{,}7c &= 4{,}08,\\
a - 4{,}5b + 20{,}2c &= 3{,}41,
\end{aligned}$$

dont la moyenne est

$$a + 0{,}1b + 27{,}1c = 4{,}59.$$

En la retranchant des précédentes, on élimine a :

$$\begin{aligned}
-1{,}0b - 26{,}3c &= -0^{s}{,}94,\\
-7{,}9b + 33{,}7c &= -0{,}28,\\
+5{,}4b + 3{,}1c &= +1{,}14,\\
+6{,}9b + 21{,}9c &= +1{,}75,\\
+1{,}2b - 25{,}4c &= -0{,}51,\\
-4{,}6b - 6{,}9c &= -1{,}18.
\end{aligned}$$

Pour former l'équation finale en b, faites la somme après avoir changé tous les signes des équations où le coefficient de cette inconnue est négatif. Pour l'équation en c, faites la somme après avoir rendu positifs tous les termes en c par un pareil changement des signes :

$$\begin{aligned}
27{,}0b - 0{,}9c &= 4^{s}{,}78,\\
8{,}8b + 117{,}3c &= 5^{s}{,}24.
\end{aligned}$$

On en tire $b = 0^{s}{,}178$, $c = 0^{s}{,}0313$, et, en revenant à l'équation finale en a, $a = 3^{s}{,}72$. La formule est donc

$$m = 3^{s}{,}72 + 0^{s}{,}178\theta + 0^{s}{,}0313\theta^{2}$$

ou bien

$$m = 3^{s}{,}47 + 0^{s}{,}0313(\theta + 2^{\circ}{,}8)^{2}.$$

Elle représente ainsi les observations :

m observés.	m calculés.	Calc. — obs.
s 3,65	s 3,58	s — 0,07
4,31	4,25	— 0,06
5,65	5,60	— 0,02
5,55	5,83	+ 0,28
6,35	6,54	+ 0,19
6,32	6,47	+ 0,15
6,00	5,48	— 0,52
4,04	3,97	— 0,07
3,41	3,56	+ 0,15
4,11	4,04	— 0,07

Les fortes discordances qu'on rencontre ici ne doivent pas être imputées à quelque insuffisance de la correction thermométrique, mais à une irrégularité de marche que le chronomètre a présentée à partir de la date 182 et que les calculs précédents ne laissent pas soupçonner. Corrigeons, en effet, les marches primitives de l'erreur due à la température, afin de mieux juger de l'effet du temps :

Dates.	Marches observées.	Correction pour θ.	Marches corrigées.
j 0....	s 2,94	s 0,11	s 2,83
43....	3,71	0,78	2,93
80....	5,11	2,16	2,95
101....	5,05	2,36	2,69
125....	5,91	3,07	2,84
149....	5,93	3,00	2,93
182....	5,68	2,00	3,68
243....	3,84	0,50	3,34
307....	3,35	0,09	3,26
336....	4,11	0,57	3,54

Évidemment la marche est restée à peu près constante et égale à $2^s,86$ pendant les cinq premiers mois, mais plus tard elle a subi une augmentation, et elle est devenue moins régulière.

Cette perturbation ne tient en aucune façon à l'influence de la température ou à un changement dans l'erreur secondaire, car, si l'on détermine de nouveau b et c par les quatre dernières marches, on trouve $b = 0^s,21$ au lieu de $0^s,18$ et $c = 0^s,033$ au lieu de $0^s,031$. On voit par là que, si l'on est en droit de compter sur la correction thermométrique, qui répond à une véritable loi, il n'en est pas de même des termes relatifs au temps.

CHAPITRE XI.

CONCLUSION. — EMPLOI DES CHRONOMÈTRES A LA MER.

Ainsi l'on parvient à déterminer assez bien la correction thermométrique par ces procédés longs et détournés et par un calcul que nous avons simplifié autant que possible. Mais les circonstances particulières à ces deux exemples sont exceptionnelles ; il arrivera le plus souvent qu'au moment du départ on n'aura que des documents incomplets ; dès lors, il faudra recueillir à la longue, de relâche en relâche, les données nécessaires, et jusque-là renoncer à la sécurité que présente l'emploi d'une bonne formule de correction thermométrique. Nous émettons donc le vœu qu'on revienne, en France, à la pratique anciennement inaugurée par le Dépôt, qu'on fasse déterminer d'avance les constantes de cette correction pour chacun des chronomètres du bord. Il est grand temps aussi que le bénéfice de cette libérale mesure soit étendu, comme en Angleterre, aux navires de commerce munis de chronomètres. Pour cela, il n'est pas besoin d'établir dans chaque port un observatoire astronomique : un observateur consciencieux, une bonne étuve et une pendule suffisent, car l'heure de Paris va être enfin transmise télégraphiquement à tous nos ports. Rien de

plus aisé, d'ailleurs, que de réduire considérablement la durée et les frais de ces études. Aujourd'hui, à Liverpool, on met sept jours d'intervalle entre deux comparaisons ordinaires avec la pendule pour obtenir une seule et unique marche, à la température de l'étuve; il faut donc maintenir cette température tout ce temps-là, et, comme plusieurs déterminations de la marche aux trois températures de 10°, 20°, 30° C. sont jugées nécessaires, l'épreuve totale doit durer près de deux mois. On la réduirait à une dizaine de jours en faisant la comparaison du chronomètre avec la pendule par la méthode si exacte des coïncidences, à l'aide d'un compteur battant la demi-seconde sidérale, car en vingt-quatre heures on aurait ainsi la marche du chronomètre à deux ou trois centièmes de seconde près.

Raisonnant dans l'hypothèse où chaque chronomètre sera désormais embarqué, comme à Liverpool, avec sa formule de correction *uniquement* thermométrique, voici à quoi se réduisent les règles pour la conduite de ces instruments en mer.

Un peu avant le départ, au besoin en vingt-quatre heures d'intervalle, on détermine par comparaison avec une bonne pendule la marche du chronomètre, en la ramenant, bien entendu, à la température τ; α est ainsi connu ou contrôlé. A l'instant même du départ, on obtient le retard absolu du chronomètre, soit par le signal d'un *time-ball*, soit par une observation astronomique lorsque la longitude est bien connue. On a ainsi les éléments nécessaires pour tirer de ce chronomètre l'heure de Paris à tout instant de la traversée. Il suffira de lire chaque jour, vers 9^h du matin, à l'époque où l'on remonte le chronomètre, la température θ de l'armoire où il est conservé, et d'ajouter à la constante α la correction $c(\theta - \tau)^2$ pour avoir la marche de la journée.

Voici le registre qui serait ouvert au premier chronomètre français que nous avons étudié plus haut:

N° 462. Winnerl A.

$\alpha = +3^s,60$ à 20°.

Vers 9^h, t. m. du bord.

DATE.	H_p.	θ.	CORRECTION thermo-métrique.	m diurne.	$\frac{m}{24}$.	INTER-VALLE.	INTER-VALLE $\times \frac{m}{24}$.	AVANCE du chronomètre.
	h m	o	s		s	h	s	h m s
Juillet 20.	9.23	25	+0,66	+4,26	0,178	0,00	0,00	0. 7.10,70
» 21.	8.53	27	+1,29	+4,89	0,204	23,50	4,79	0. 7.15,49
» 22.	8.13	30	+2,64	+6,24	0,260	23,33	6,07	0. 7.21,56

Plus une colonne d'observations pour l'état de la mer, la marche du navire, les accidents.

On continue ainsi de jour en jour jusqu'à ce que l'observation d'un point terrestre en vue, une relâche ou une distance lunaire permette de contrôler le chronomètre et d'en déterminer de nouveau l'état absolu. Alors, en comparant le nouvel état à l'ancien, on en déduit une marche nouvelle qu'on ramène à la température τ et dont on se sert pour l'escale suivante, à moins qu'on n'ait eu le temps de déterminer la marche, au port de relâche, par des observations spéciales. Il n'y aura de changé que la valeur de α et la correction initiale du chronomètre. Ces prescriptions sont fondées sur le fait d'expérience que les variations des chronomètres, dans la suite des temps, ne sont assujetties à aucune loi, en sorte que le dernier état absolu et la dernière marche observée valent mieux, en général, que tout ce qu'on pourrait déduire, par le calcul, des états ou des marches antérieures.

On voit combien est simple la conduite d'un chronomètre en mer lorsqu'on part muni des données indispensables et qu'on n'est pas forcé d'y suppléer par des tâtonnements arbitraires. Ce que nous venons de dire d'un chronomètre compte pour les autres dans le cas où l'on aurait l'avantage d'en posséder plusieurs à bord. Chacun d'eux doit être traité à part, comme s'il était unique. Tant qu'ils marchent à peu près d'accord, on

prendra la simple moyenne de leurs indications pour obtenir l'heure de Paris. Chacun d'eux aura sa feuille ou son registre spécial ; on y joindra seulement une feuille de comparaison disposée à peu près comme le modèle suivant pour deux chronomètres A et B :

DATE.	COMPARAISON VERS 9^h, t. m. du bord. A.	B.	H_p par A.	H_p par B.	DEMI-DIFFÉRENCE à ajouter à A.
	h m s	h m s	h m s	h m s	s
Juillet 20.	9.30. 0,00	10.48.52,50	9.22.49,30	9.22.29,10	—10,10
Avance...	0. 7.10,70	1.26.23,40			
Juillet 21.	9. 0. 0,00	10.18.43,05	8.52.44,51	8.52.22,03	—11,24
Avance...	0. 7.15,49	1.26.21,02			

On y voit, par exemple, d'un coup d'œil, que la correction à appliquer à une indication quelconque du chronomètre A, dans le cours du 21 juillet, se compose de deux parties : 1° l'avance de ce chronomètre, calculée pour l'heure considérée; 2° la petite correction — $11^s,24$, destinée à ramener l'heure du chronomètre A à la moyenne des heures de Paris fournies par A et B.

On ne cherchera jamais à les corriger l'un par l'autre, car il s'agit de témoignages distincts qui n'ont de valeur qu'en ce qu'ils restent indépendants. C'est par la même raison qu'on ne doit jamais chercher à corriger l'une par l'autre des observations astronomiques dont on doit prendre la moyenne. Lorsqu'il y a entre A et B une discordance inquiétante, c'est la preuve qu'il est grand temps de recourir à d'autres moyens pour avoir l'heure de Paris. Si l'on a trois chronomètres A, B, C, l'accord de A et de C, alors qu'il se produit une discordance pour B, n'est pas une preuve certaine que la vérité est du côté des deux premiers. En effet, ces témoignages ne sont pas tous aussi indépendants que nous venons de le supposer : réunis sur un même point du navire, exposés de la même ma-

nière aux chocs, aux trépidations du propulseur, au roulis, aux émanations diverses, aux variations de température, etc., il est difficile que deux de ces instruments échappent tout à fait à des influences qui auraient fortement altéré la marche du troisième. Si cependant il était impossible de se procurer astronomiquement le contrôle devenu indispensable, le plus prudent serait de renoncer à tenir compte de B pour la formation de l'état moyen et de mettre ainsi B hors de service jusqu'à ce que de nouvelles observations aient permis de prononcer définitivement sur sa valeur. Quant au compteur, chronomètre mobile que l'on porte sur le pont pour les observations, il ne saurait jouer le même rôle qu'un des chronomètres placés dans l'armoire, à cause des déplacements fréquents qu'il subit et de l'incertitude qui en résulte pour sa correction de température.

Sur la question de savoir quel nombre de chronomètres est nécessaire, nous ne saurions mieux faire que de citer à ce sujet l'opinion d'un juge compétent, M. de Magnac [1] :

« Il va sans dire que, si les perturbations des chronomètres étaient assez grandes pour faire redouter une erreur itinéraire de plus de 8 milles $\left(\frac{32^s}{\sin\lambda}\right)$ en longitude, il faudrait avoir recours, pour continuer sa route, à l'ancienne navigation et observer les distances lunaires. Depuis quelques années, l'habitude des distances lunaires s'est beaucoup perdue dans la marine; nous trouvons que c'est un mal, car, si l'on n'a qu'un chronomètre, on ne sait pas s'il éprouve ou non des dérangements; si l'on en a deux, et que l'un d'eux éprouve des perturbations, on ne saura pas distinguer lequel a été troublé dans sa marche; si l'on en a trois, et que deux viennent à être dérangés, on ne sera pas encore sûr, dans ce cas, de l'heure du premier méridien : nous venons de rappeler, il n'y a qu'un instant, que ce cas est heureusement très rare. Quel que soit d'ailleurs le nombre des chronomètres, il peut arriver qu'on les ait laissés s'arrêter, qu'un grand ressort se brise, enfin que,

---

(1) *Nouvelle Navigation*, p. 51*.

pour des raisons quelconques, les chronomètres se trouvent hors de service. Dans ces diverses circonstances, un officier des montres qui n'a pas l'habitude d'observer les distances lunaires se trouvera très embarrassé pour donner la position du navire. Nous conseillons donc à ces officiers, s'ils veulent être à la hauteur de leur tâche, de s'exercer souvent à observer des distances lunaires; il n'est pas nécessaire de les calculer toutes, il faut seulement en calculer de temps en temps pour pouvoir, au besoin, trouver rapidement la longitude par cette méthode. »

Ainsi deux valent mieux qu'un, trois valent mieux que deux, mais les distances lunaires donnent seules la sécurité absolue.

Nous ajouterons une simple remarque à ces sages conclusions : c'est que l'observation et le calcul des distances lunaires sont moins compliqués et moins *troublesome*, comme disent les Anglais, que l'étude de plusieurs chronomètres par le système des courbes de marches isotemps, isothermes, relatives, intégrales ou normales que plusieurs savants officiers ont préconisé en France dans ces derniers temps.

On entend dire souvent que les progrès de l'horlogerie ont rendu désormais les distances lunaires inutiles. Tout en applaudissant à ces progrès incontestables, il faut se rendre compte de leur portée. Or voici comment M. Hartnup, directeur de l'observatoire nautique de Liverpool, qui a contribué lui-même avec éclat à ces progrès, apprécie cette année même l'état des choses :

« L'observatoire possède actuellement une ample collection de renseignements sur la manière dont nos chronomètres se comportent à la mer. Probablement peu de personnes se doutent du degré de précision qu'on peut atteindre aujourd'hui dans la détermination des longitudes en mer quand on applique la correction due aux changements de marche par l'effet de la température. Sur les soixante chronomètres qui ont été dernièrement rapportés à l'observatoire après des voyages dont la durée moyenne est de cent dix jours, la moitié de ce nombre n'a présenté qu'une erreur de $9^s,3$, c'est-à-dire de $2\frac{1}{2}$ milles

géographiques à l'équateur, après un voyage de près de quatre mois. »

Mais il faut noter ici qu'un de ces excellents chronomètres, pris au hasard, après avoir bien marché pendant cent jours, peut fort bien présenter, à partir du cent-unième, une perturbation qui ira en peu de temps à 45^s, c'est-à-dire à plus de 11 milles. Nous en avons vu plus haut un exemple tiré des documents mêmes de M. Hartnup. Il résulte de la proportion ci-dessus que, si pour chaque chronomètre éprouvé par de longs succès on peut parier que dans le voyage qu'on va entreprendre on atteindra le haut degré de précision dont on vient de se vanter, *il y a juste tout autant de chances pour qu'il en soit autrement*. C'est donc naviguer au petit bonheur, à un contre un, que de se fier exclusivement à des instruments délicats sur lesquels le marin est absolument sans action, dont les dérangements, toujours à craindre, échappent à toute prévision théorique et restent inexplicables pour le constructeur lui-même lorsqu'il vient à les ouvrir, à les étudier pièce à pièce, la loupe à la main.

Nous avons longuement insisté sur la stabilité de la correction thermométrique. Ses deux constantes dépendant de deux éléments géométriquement appréciables, l'élasticité du spiral et la dilatation de l'anneau bimétallique du balancier, on conçoit qu'on ait réussi à représenter le phénomène par une formule mathématique, tandis que les effets du temps, c'est-à-dire l'usure, les huiles, etc., échappent à toute analyse. Cependant M. Peters, directeur de l'observatoire de Kiel, a signalé dans ces dernières années une cause d'altération non géométrique du premier élément : c'est une oxydation presque imperceptible qu'il a trouvée dans certains spiraux revenus de voyage. Quand ce phénomène se produit, il peut en résulter une modification progressive, peu régulière d'ailleurs, dans l'action de la chaleur sur le spiral, et par suite dans l'erreur secondaire. Bien que la longue pratique de l'observatoire de Liverpool ne laisse soupçonner rien de pareil, il suffit qu'une altération de ce genre ait été signalée dans certains spiraux d'acier pour

qu'on doive s'en préoccuper. Il convient donc de poser comme règle que les chronomètres devront être soumis de temps en temps à de nouvelles épreuves. De leur côté, les horlogers devront rechercher avec soin et signaler les moindres traces de rouille sur les spiraux des instruments dont ils renouvellent les huiles. Des ressorts en or écroui n'offriraient pas cet inconvénient.

CHAPITRE XII.

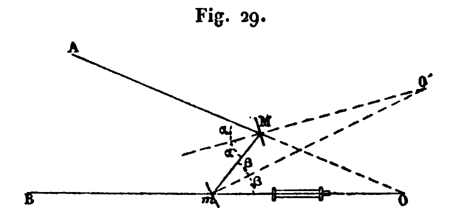
LE SEXTANT.

Lorsqu'un rayon de lumière tombe sur un miroir, il est réfléchi en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Si l'on fait tourner le miroir d'un certain angle, le rayon réfléchi change de direction et tourne d'un angle double. On s'est servi de cette propriété pour construire des instruments destinés à mesurer les angles entre deux objets, l'un vu directement par la lunette, l'autre vu par la même lunette, mais par réflexion sur un miroir placé sur le trajet des premiers rayons et ne couvrant que la moitié de l'objectif. Ces instruments étaient inapplicables en mer, car le moindre mouvement du navire, en déplaçant le miroir, faisait dévier d'un angle double lès rayons réfléchis et empêchait ainsi la superposition des images des deux objets. Mais, si au lieu d'une seule réflexion on en emploie deux, les choses changent complètement; la direction d'un rayon doublement réfléchi devient indépendante de celle des deux miroirs; pourvu que l'angle de ceux-ci ne change pas, on peut faire tourner leur ensemble sans que le rayon émergent, après deux réflexions, change le moins du monde de direction. Un instrument fondé sur ce principe aura donc l'avantage de n'avoir pas besoin d'une installation fixe.

Dans la *fig.* 29, où il s'agit de la mesure de l'angle AOB,

le rayon AO est doublement réfléchi par les deux miroirs M, *m* et se trouve ainsi amené dans la direction *m*O. Menons les

Fig. 29.



normales MO′ et *m*O′ aux deux miroirs; la première sera la bissectrice de l'angle AM*m*, la seconde celle de l'angle M*m*O. Le triangle M*m*O′ donne

$$\alpha = O' + \beta;$$

le triangle M*m*O donne

$$2\alpha = O + 2\beta;$$

donc $O = 2O'$. Si l'angle O′ des deux miroirs reste constant, de quelque manière qu'on présente leur système au rayon AO, la direction du rayon émergent, après deux réflexions, sera BO ou une parallèle à cette droite.

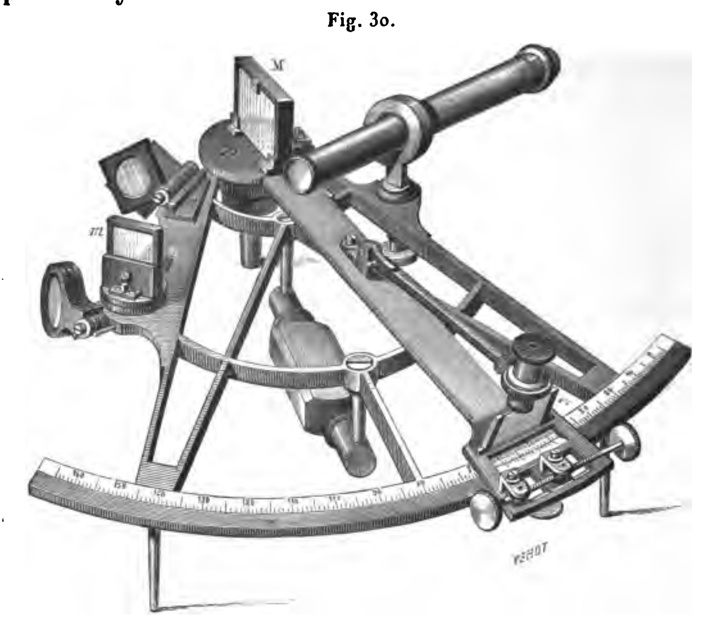
Pour construire sur ce principe un instrument de mesure angulaire, il suffit de placer une lunette sur le trajet OMB de manière à viser directement l'objet B vu par-dessus le miroir *m* [1] et à l'aide d'une partie de l'objectif, puis de faire varier l'angle des deux miroirs de manière à amener, par deux réflexions, les rayons venus de l'objet A dans la direction B*m*O. L'image de cet objet sera vue dans la lunette par l'autre moitié de l'objectif. Lorsque les deux images se trouveront en coïncidence, l'angle des deux directions AO et BO sera égal au double de l'angle des deux miroirs.

Cela posé, montons les deux miroirs et la lunette sur un châssis portant un arc de cercle divisé et, au centre de ce cercle, un pivot autour duquel le miroir M puisse tourner, entraînant avec lui une alidade à vernier, tandis que le petit miroir reste

[1] Ou par une moitié non étamée de ce miroir.

invariablement fixé au châssis : on aura le sextant, inventé d'abord par Newton, puis par Godfrey, de Pennsylvanie, et enfin par Hadley.

Fig. 30.



L'angle actuel des deux miroirs est donné par la lecture de la division qui répond à la direction de l'alidade ; il se lit sur le limbe divisé ; en le doublant, on a l'angle des deux directions AO et BO.

Cet admirable instrument est applicable à la mer, car, si le roulis ou le tangage déplace les images des deux astres dans la lunette que l'observateur tient, il ne les séparera pas lorsqu'elles auront été amenées à la coïncidence; elles ne feront que se mouvoir ensemble dans le champ de la vision.

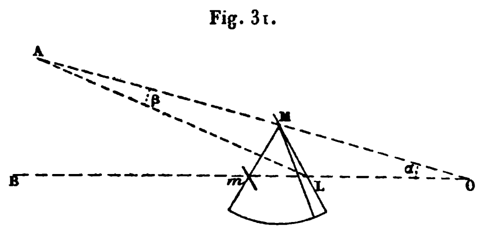
L'origine de la graduation du limbe devrait être le point où se place l'alidade quand les deux miroirs sont parallèles. Pour déterminer ce point, on dirige l'instrument sur un objet très éloigné, le Soleil par exemple. On en voit deux images, l'une directe, l'autre par double réflexion. On amène la seconde à coïncider avec la première : la division v où s'arrête alors le zéro de l'ali-

dade est l'origine des angles formés par les deux miroirs. Il faut donc retrancher υ de toute lecture du limbe correspondant à un angle mesuré. Le mieux, quand on opère sur le Soleil, est de mettre les deux images en contact par leurs bords voisins, puis par leurs bords opposés, et de prendre la moyenne des indications du vernier. Comme vérification, la demi-différence des deux lectures doit donner le diamètre angulaire du Soleil.

Pour éviter de doubler les lectures du limbe, on divise celui-ci en demi-degrés et on les numérote comme des degrés entiers.

S'il s'agissait d'objets terrestres peu éloignés, les mesures angulaires au sextant auraient besoin d'une petite correction, due à la différence des angles vus en L où est l'œil et en O où les rayons se croisent.

Fig. 31.



L'angle à mesurer est ALB; celui que donne l'instrument est AOB ou α. Leur différence est un petit angle β, donné par la proportion

$$\frac{\sin\beta}{\sin \mathrm{MLA}} = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{LA}}.$$

Or l'angle MLO, extérieur au triangle équilatéral MmL, est de 120°; par suite, $\mathrm{MLA} = 180° - \alpha - \beta - 120° = 60° - \alpha - \beta$. ML se mesure sur la monture du sextant, et LA est la distance supposée connue du point A à l'observateur L.

Rectification du sextant.

Pour que le théorème d'Optique mentionné plus haut se trouve réalisé, il faut que la double réflexion s'opère dans un plan perpendiculaire aux deux miroirs. De là cette triple condition : chaque miroir doit être perpendiculaire au plan de l'in-

strument ; l'axe optique de la lunette doit être parallèle à ce plan.

1° *Perpendicularité du grand miroir.* — En regardant par réflexion dans le grand miroir le limbe de l'instrument, l'œil étant placé très près du plan de ce limbe, on verra en même temps une portion de ce limbe directement, et cette même partie par réflexion. Si la partie réfléchie n'est pas sur le prolongement de la première, il y a un défaut de perpendicularité que l'on corrige à l'aide des vis propres du grand miroir.

Ce procédé, fort rapide, n'est pas rigoureux, parce que l'œil doit se placer au-dessus du plan du limbe et ne le voit pas ainsi, par réflexion, dans un plan exactement perpendiculaire au grand miroir. Il faut donc élever le plan du limbe à la hauteur de l'œil. On y parvient à l'aide de petites équerres égales nommées *viseurs*, qu'on place sur le limbe de part et d'autre de l'alidade, et d'un troisième viseur qui détermine la position de l'œil. L'opération se fait d'ailleurs comme précédemment ; il faut que l'arête supérieure du viseur réfléchi soit sur le prolongement de l'arête de celui qu'on voit directement.

2° *Perpendicularité du petit miroir.* — Si celui-ci n'est pas perpendiculaire au plan du limbe, on ne pourra pas amener le grand miroir, bien rectifié, au parallélisme avec le premier. Quand on pointera la lunette sur le Soleil, il n'y aura pas moyen d'en faire coïncider les deux images. Il faudra toucher aux vis de rappel du petit miroir en même temps qu'à celle de l'alidade, de manière à obtenir cette coïncidence.

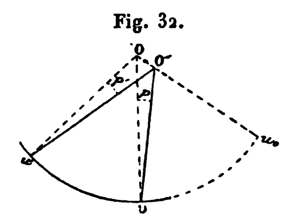
3° Les angles doivent être mesurés dans un plan perpendiculaire aux miroirs et par suite parallèle au plan du limbe ; il faut donc rendre l'axe optique de la lunette parallèle à ce plan. L'instrument étant fixé horizontalement sur une table, on visera, le long du plan du limbe, l'arête rectiligne d'un mur éloigné, et l'on regardera ensuite par la lunette pour voir si cette arête se trouve entre les deux fils du réticule placé au foyer de l'objectif de la lunette. Dans le cas contraire, on déplacera cette plaque à l'aide d'une vis spéciale jusqu'à ce que cette arête soit au milieu des fils.

Au fond, l'axe optique ne joue pas ici le même rôle que dans les autres instruments de mesure. La croisée des fils des lunettes ordinaires est remplacée, dans celle du sextant, par deux fils parallèles assez écartés entre lesquels doivent être maintenues les images ; mais celles-ci peuvent occuper toutes les positions dans la bande limitée par ces fils.

Erreur d'excentricité.

Si l'axe de rotation de l'alidade ne coïncide pas rigoureusement avec le centre des divisions de l'arc gradué, il en résulte une erreur dont il faut tenir compte.

Fig. 32.



Soient O le centre des divisions, O′ le centre de l'alidade, et v le point de parallélisme des miroirs. L'arc $u' - v$ parcouru sur le limbe par l'alidade mesure l'angle $u'\mathrm{O}v$ et non l'angle $u'\mathrm{O}'v$ des deux positions de l'alidade. L'erreur p de la direction $\mathrm{O}v$ est donnée par la relation

$$\sin p \text{ ou } p = \frac{e}{r}\sin(v - u_0),$$

e étant l'excentricité OO′, r le rayon du cercle et u_0 la division de l'arc gradué (prolongé idéalement au besoin) qui répond à la ligne des centres OO′.

L'erreur p' de la direction $\mathrm{O}u'$ sera pareillement

$$\sin p' \text{ ou } p' = \frac{e}{r}\sin(u' - u_0).$$

Les vraies directions, comptées à partir de la direction $\mathrm{OO}'u_0$, seront

$$v - u_0 + p \quad \text{et} \quad u' - u_0 + p'.$$

L'angle compris et qu'on veut mesurer $vO'u'$ sera donc

$$u' + p' - (v + p) \quad \text{ou} \quad u' - v + p - p'.$$

Pour être en état d'appliquer ces corrections, il faut déterminer une fois pour toutes les constantes e et u_0. On mesurera avec l'instrument deux angles très différents et bien connus, l'un A, l'autre B. Pour le premier on aura

$$\mathrm{A} = u' - v + \frac{e}{r}\sin(u' - u_0) - \frac{e}{r}\sin(v - u_0),$$

pour le second

$$\mathrm{B} = u'' - v + \frac{e}{r}\sin(u'' - u_0) - \frac{e}{r}\sin(v - u_0).$$

Ces deux équations détermineront e et u_0. Pour les résoudre, on développera les sinus et l'on posera

$$\frac{e}{r}\sin u_0 = x, \quad \frac{e}{r}\cos u_0 = y,$$

et l'on n'aura plus à traiter que deux équations linéaires qui donneront x et y; puis on calculera e et u_0 par

$$\operatorname{tang} u_0 = \frac{x}{y}, \quad \frac{e}{r} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dans ces calculs, on aura soin d'exprimer $\frac{e}{r}$ en secondes en introduisant $206265'' \frac{e}{r}$ au lieu de $\frac{e}{r}$.

Ces inconnues une fois déterminées, il serait aisé de construire une Table de correction donnant à vue p pour chaque valeur de u.

Erreurs de division.

Les erreurs de division, quelles qu'elles soient, peuvent être exprimées par la série de Fourier

$$\varepsilon = \alpha \sin(u - \mathrm{A}) + \beta \sin 2(u - \mathrm{B}) + \gamma \sin 3(u - \mathrm{C}) + \ldots,$$

en sorte que, si les constantes α et A, β et B, ... sont connues, il suffira d'ajouter à chaque lecture u faite au vernier la correction correspondante ε.

Ordinairement on peut se contenter des deux ou trois premiers termes de cette série; on remarquera même que le premier, $\alpha \sin(u - A)$, se confond déjà avec l'erreur d'excentricité. Il ne reste donc à déterminer que β et B, γ et C. Pour cela, il faudrait mesurer au sextant d'autres angles bien connus et former des équations de condition. On se dispense généralement de ce travail un peu long, et l'on aime mieux s'en remettre à l'habileté du constructeur.

Ici se place une remarque capitale pour la théorie de ces instruments. Lorsqu'au lieu d'un sextant on emploie un cercle entier dont l'alidade est munie de deux verniers diamétralement opposés, la moyenne des lectures faites à ces deux verniers est exempte non-seulement de l'erreur d'excentricité, mais encore des erreurs de division exprimées par les termes d'ordre impair de la série précédente. En effet, soient u et u_1 les deux lectures faites aux deux verniers de l'alidade. Ces lectures corrigées seront, en remarquant que u_1 est à très peu près $u + 180°$,

$$u + \alpha \sin(u - A) + \beta \sin 2(u - B) + \gamma \sin 3(u - C) + \ldots,$$
$$u_1 + \alpha \sin(180° + u - A) + \beta \sin 2(180° + u - B) + \gamma \sin 3(180° + u - C) + \ldots.$$

En faisant la somme pour avoir la moyenne, on verra que les termes d'ordre impair s'annulent l'un l'autre, en sorte qu'il reste finalement, même dans le cas d'une excentricité variable,

$$\frac{u + u_1}{2} + \beta \sin 2(u - B) + \delta \sin 4(u - D) + \ldots.$$

Les cercles entiers à réflexion ont d'autres avantages sur les sextants. Avec les premiers, par exemple, on mesure tous les angles possibles, tandis qu'avec les seconds il faut s'arrêter aux angles de 120°.

Erreurs dues à une rectification incomplète.

La plus grave de ces erreurs est celle qui provient d'une petite inclinaison i de l'axe optique de la lunette sur le plan du limbe.

Représentons en ABCD (*fig.* 33) la marche d'un rayon de lumière doublement réfléchi par les miroirs *m* et M, dans un plan

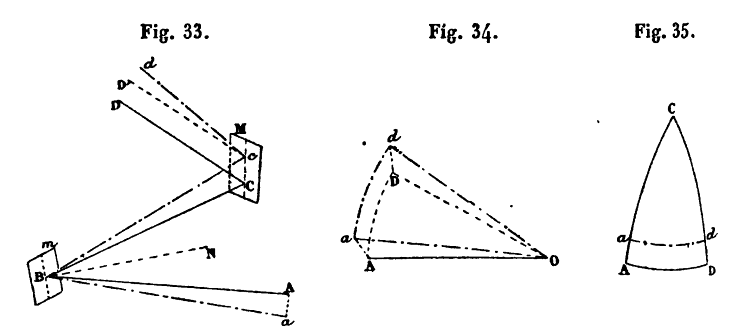


Fig. 33. Fig. 34. Fig. 35.

perpendiculaire à leur intersection supposée verticale. Si l'on incline le rayon incident AB d'un certain angle *i*, dans le vertical de cette droite, en *a*B, le rayon réfléchi BC s'inclinera en sens contraire du même angle *i* dans le vertical CB*c* et deviendra B*c*. Par le point *c* menons *c*D' parallèle à CD; le rayon *cd*, réfléchi par le miroir M, remontera du même angle $i = dc\mathrm{D}'$ dans le vertical de CD ou de *c*D'. On voit que la nouvelle trajectoire *abcd* sera encore contenue dans un plan, mais ce plan ne sera plus perpendiculaire aux deux miroirs. Pour apprécier l'effet produit, menons par un même point O (*fig.* 34) des droites parallèles aux rayons extrêmes AB et CD, *ab* et *cd*; l'angle lu sur le limbe du sextant sera AOD, tandis que l'angle des rayons lumineux perçus sera *a*O*d*. Les petits angles *a*OA et *d*OD sont d'ailleurs égaux à *i*.

Cela posé, imaginons (*fig.* 35) un triangle sphérique birectangle ayant pour centre le point O, pour côté l'arc AD et pour troisième sommet le pôle de l'instrument placé horizontalement, c'est-à-dire le point C où la verticale du point O va percer la sphère. Portons en A*a* et en D*d* un arc égal à l'arc *i*, et menons l'arc de grand cercle *ad*. L'instrument nous donne AD, puisque nous supposons les miroirs bien perpendiculaires au plan du sextant; le triangle sphérique nous donnera *ad* par la formule (C*a* étant $90° - i$ ainsi que C*d*)

$$\cos ad = \sin^2 i + \cos^2 i \cos \mathrm{AD}$$

ou bien

$$\sin \tfrac{1}{2} ad = \cos i \sin \tfrac{1}{2} \mathrm{AD}.$$

Remplaçons $\cos i$ par $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} i$; nous aurons

$$\sin \tfrac{1}{4}(ad - \mathrm{AD}) \cos \tfrac{1}{4}(ad + \mathrm{AD}) = -\sin^2 \frac{i}{2} \sin \frac{\mathrm{AD}}{2}.$$

Comme ad et AD diffèrent peu, nous remplacerons

$$\cos \tfrac{1}{4}(ad + \mathrm{AD}) \text{ par } \cos \tfrac{1}{2}\mathrm{AD},$$

d'où il suit

$$ad - \mathrm{AD} = -4 \sin^2 \frac{i}{2} \operatorname{tang} \frac{\mathrm{AD}}{2}\, 206265''.$$

Borda a donné une Table de ces erreurs pour diverses valeurs de i et de l'arc mesuré sur le limbe AD. En voici un extrait pour $i = 10'$ et $20'$:

AD.	Correction pour $i = 10'$.	$i = 20'$.
0°....	0″	0″
20....	0	1
40....	1	3
60....	1	4
80....	1	6
100....	2	9
120....	3	12
140....	5	19
160....	10	40
180....	1200	2400 (¹)

Naturellement l'angle donné par l'instrument est toujours trop grand; il faut en retrancher la correction ci-dessus.

Ainsi l'on doit s'attacher à ne pas laisser subsister une inclinaison notable dans l'axe optique de la lunette, puisque les grands angles en seraient très sensiblement affectés.

Si le grand miroir est incliné d'un petit angle sur le plan du sextant, la normale à ce miroir, en tournant autour de l'axe, décrira, non plus un plan, mais une surface conique. De plus, le petit miroir ayant été rectifié sur le grand lui sera parallèle

(¹) Pour $\mathrm{AD} = 180°$ la relation exacte donne $\cos ad = \sin^2 i - \cos^2 i = -\cos 2i$, d'où $ad - 180° = -2i$.

lorsque l'alidade sera au point de coïncidence des images d'un même objet. L'intersection des deux miroirs ne sera plus perpendiculaire au plan du limbe, mais fera avec ce plan un angle un peu variable avec la grandeur de l'arc mesuré. Nous nous retrouvons donc dans un cas analogue au précédent, car nous observerons les angles dans un plan légèrement oblique au plan ordinaire de réflexion. L'angle réel, c'est-à-dire celui des miroirs, est la projection du premier sur un plan perpendiculaire à leur intersection actuelle. Il y aurait à considérer le même triangle sphérique CDA où nous connaissons l'arc *ad*; seulement les petits arcs *a*A et *d*D ne seraient plus égaux. Il faudrait, pour les calculer, déterminer l'inclinaison de l'intersection actuelle des deux miroirs sur le limbe; mais il nous suffit de remarquer que, dans l'équation

$$\cos ad = \sin i \sin i' + \cos i \cos i' \cos AD,$$

la différence $ad - AD$ est, comme tout à l'heure, du second ordre de petitesse, si i et i' sont du premier ordre. Cette cause d'erreur sera donc tout aussi négligeable que la première, pourvu que l'inclinaison du grand miroir sur le plan du limbe ne dépasse pas une dizaine de minutes.

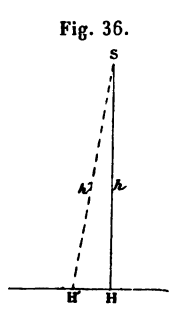
Nous ne parlerons pas du prismatisme des miroirs. Il est facile de s'assurer que les miroirs ont leurs faces parallèles en y regardant avec une lunette un astre par réflexion. Si le miroir est prismatique on verra deux images et alors il faudra refuser le miroir. De même, les verres obscurcissants qu'on interpose sur le trajet des rayons du Soleil pour affaiblir son éclat et le rendre comparable à celui de la Lune dans la mesure des distances lunaires, ou à celui de l'horizon de la mer quand on mesure une hauteur, doivent être rebutés si leurs faces ne sont pas parallèles.

Mesure des hauteurs angulaires.

Le sextant sert à mesurer la distance angulaire de deux points quelconques; mais son application principale en mer est la me-

sure des hauteurs comptées à partir de la ligne d'horizon. L'observateur, tenant le limbe de l'instrument dans le vertical de l'astre, pointe la lunette sur la ligne d'horizon, puis, en faisant tourner l'alidade, et par conséquent le grand miroir, il amène l'image deux fois réfléchie de l'astre dans le champ de la lunette. S'il s'agit du Soleil ou de la Lune, il établit le contact du bord supérieur ou du bord inférieur avec la ligne d'horizon. La division du limbe à laquelle s'arrête le zéro de l'alidade donne, sauf correction pour le point de parallélisme des miroirs, la hauteur angulaire du bord observé au-dessus de l'horizon de la mer. Pour avoir la hauteur vraie, comptée à partir du plan horizontal de l'observateur, il faut retrancher la dépression, élément réduit en Tables qu'on trouvera plus loin. Le complément de cette hauteur vraie est la distance zénithale.

Fig. 36.



Il faut tenir le plan du sextant bien vertical. Si ce plan a une inclinaison i sur le vertical de l'astre SH, la hauteur mesurée sera h' et non h. Le triangle SH'H, rectangle en H, donne

$$\operatorname{tang} h = \operatorname{tang} h' \cos i.$$

Désignons par x la petite différence $h' - h$; nous aurons, en prenant le premier terme d'une série connue (p. 33),

$$x = \operatorname{tang}^2 \frac{i}{2} \sin 2n,$$

ou, en minutes,

$$x = 3438' \operatorname{tang}^2 \frac{i}{2} \sin 2h.$$

Pour une inclinaison donnée, x atteint son maximum quand

$h = 45°$. Si $i = 1°$, on trouve alors $x = 0',26$. Il faut donc prendre l'habitude de tenir l'instrument bien perpendiculairement à la ligne d'horizon. Il existe heureusement un fort bon moyen de vérification ([1]). Le contact du bord du Soleil avec la ligne d'horizon étant opéré, on balance légèrement le sextant en le faisant tourner autour de l'axe de la lunette. On voit alors l'image du Soleil osciller à droite et à gauche. Si le contact a été obtenu dans le vertical exact du Soleil, la courbe décrite ainsi par le point le plus bas du disque sera tangente à l'horizon de la mer. Dans le cas contraire l'image du Soleil, en se balançant ainsi, mordra sur l'horizon.

Une autre condition d'exactitude non moins essentielle consiste en ce que les deux images qu'on veut mettre en contact doivent avoir à peu près même intensité. Il faudra donc affaiblir considérablement l'image du Soleil à l'aide des verres colorés que porte le sextant.

Enfin il faut éviter de contracter l'habitude de faire empiéter légèrement le disque de l'astre sur la ligne d'horizon ou de laisser entre eux un petit espace. Faisons une première observation en commençant par faire empiéter le Soleil sur l'horizon, puis en relevant peu à peu l'astre jusqu'au moment où l'on juge le contact établi ; faisons-en une seconde en commençant, au contraire, par mettre le bord de l'astre au-dessus de la ligne d'horizon, pour l'amener peu à peu au contact : les deux mesures devront s'accorder ; en tout cas, leur moyenne sera à peu près exempte de l'erreur d'habitude dont nous parlons.

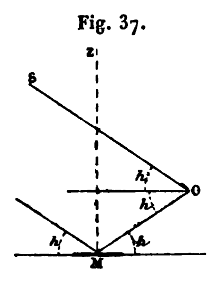
La mesure des hauteurs angulaires à terre exige l'emploi d'un horizon artificiel sur lequel on observe le Soleil par réflexion avec la lunette, tandis qu'on amène l'image directe dans le champ par double réflexion. On obtient ainsi le double de la hauteur de l'astre observé, ainsi qu'on le voit en jetant un

---

(1) Il faut faire grande attention à cette cause d'erreur là; elle n'agit pas comme les causes accidentelles ordinaires, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, de manière que leurs effets se compensent en grande partie dans la moyenne de plusieurs mesures, grâce au jeu des signes opposés : elle agit toujours dans le même sens et donne des hauteurs trop fortes.

coup d'œil sur la *fig.* 37. Le miroir est, d'ordinaire, un plan de verre noir qu'on place sur un support et qu'on rend bien

Fig. 37.



horizontal à l'aide d'un niveau. Il vaut mieux recourir à un bain de mercure. On emploie pour cela une simple cuvette sphérique très peu courbe, en cuivre argenté, dans laquelle on verse le mercure. Ce liquide mouille les parois de cette sorte de vase, et, si on lui donne tout juste la profondeur nécessaire pour éviter les effets de la capillarité, sa surface sera peu sensible aux petits mouvements de l'air. Lorsqu'on est forcé de le recouvrir d'une glace, il faut faire deux observations de hauteur en donnant à la glace deux positions symétriques, c'est-à-dire en la tournant dans son plan de 180°, pour que la moyenne des deux hauteurs soit indépendante du défaut de parallélisme des faces de ladite glace.

Degré de précision d'une mesure au sextant.

Supposons un sextant bien divisé et exempt d'erreur d'excentricité, des miroirs bien plans, à faces bien parallèles, des verres obscurcissants irréprochables. 1° Il faudra le rectifier par une série d'opérations qui laisseront quelques défauts. De là une première source d'erreurs très petites dont les mesures seront affectées plus ou moins, suivant les cas. 2° Il faudra déterminer le point de parallélisme des miroirs, point qui sert d'origine aux divisions du limbe. Cette opération comporte une nouvelle erreur fort petite, mais non nulle en général. Il y aura encore : 3° l'erreur de pointé ; 4° l'erreur due à l'inclinaison dont nous

venons de parler; 5° l'erreur de lecture du vernier, qui donne les 10″, mais sur lequel on apprécie fort bien les 5″; 6° l'erreur de la dépression. Admettons, pour fixer les idées, que toutes ces erreurs soient de 5″ et qu'elles aient bien le caractère d'erreurs accidentelles. Alors l'erreur probable d'une mesure de hauteur au sextant, avec un bon instrument et dans des circonstances favorables, sera $\pm\sqrt{5^2\times 6} = \pm 12'',4$ ou $\pm 0',2$ (Chap. XVI).

La distance angulaire de deux astres s'obtient avec plus d'exactitude. Le pointé est bien plus précis, et il n'y a pas d'erreur de dépression.

Si les erreurs systématiques sont réellement négligeables, les observations n'étant plus exposées qu'à des erreurs accidentelles de pointé et de lecture, on parvient à réduire notablement l'erreur susdite en recommençant la même mesure m fois de suite, avec le même soin, et en prenant la moyenne des résultats. L'erreur probable de cette moyenne sera $\pm \frac{0',2}{\sqrt{m}}$. Avec quatre mesures seulement, on réduirait l'erreur à 0′,1.

A terre, on obtient naturellement plus d'exactitude; en outre, comme on mesure le double de la hauteur, l'erreur probable de la hauteur simple sera réduite de moitié. L'erreur probable d'une mesure double étant de 7″ à 8″, on parvient à réduire cette erreur à 2″ ou 3″ par un nombre modéré d'observations. Voici, comme preuve de cette assertion, un petit Tableau donné par Bohnenberger. On a mesuré la colatitude d'Altona à l'aide de divers instruments à réflexion et au moyen d'un grand nombre d'observations de culmination solaire.

Comme cette colatitude est parfaitement connue, par les travaux habituels des astronomes de l'établissement qui l'ont fixée à 36°27′14″,4, on juge immédiatement de la bonté des instruments mis ainsi à l'épreuve.

1844.	COLATITUDES observées.	NOMBRE des observations.	MOYENNE.	ERREUR.
Premier sextant de 6 pouces de rayon.				
Sept. 6.....	36°.27'.11"	19	36°.27'.12"	— 2"
» 7.....	16	22		
» 15.....	13	27		
» 16.....	8	21		
Cercle de 5 pouces de rayon.				
Février 7.....	36.27.14	10	36.27.14	0
» 8.....	15	10		
» 11.....	14	11		
» 12.....	8	10		
» 20.....	13	12		
» 28.....	17	12		
Mars 1.....	13	12		
» 4.....	18	12		
Deuxième sextant de 6 pouces de rayon.				
Mars 30.....	36.27.14	15	36.27.14	0
Avril 1.....	20	16		
» 2.....	10	15		
» 5.....	13	13		
» 6.....	15	14		
Petit cercle de 2 ½ pouces de rayon.				
Mars 12.....	36.27.13	10	36.27.19	+ 5
» 13.....	23	10		
» 16.....	18	18		
» 20.....	22	12		
» 21.....	25	6		

Il ne s'agit plus ici d'erreurs probables, mais d'erreurs bien réelles ; elles n'en permettent que mieux de juger du degré de précision qu'on peut atteindre avec les instruments à réflexion.

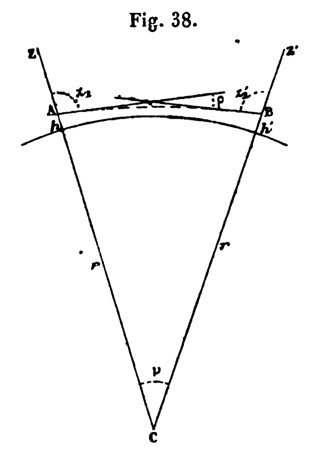
CHAPITRE XIII.

DÉPRESSION DE L'HORIZON DE LA MER.

Pour une portion quelconque de la trajectoire d'un rayon de lumière dans les couches atmosphériques, la somme des déviations subies ou l'angle ρ des tangentes extrêmes est $\frac{v}{m}$ (p. 60). En adoptant, avec les astronomes, 3,25 pour valeur du coefficient $\frac{m-1}{2}$ de la réfraction astronomique, on trouve $m = 7,5$.

Mais les grands nivellements géodésiques fournissent aussi une évaluation de m tout à fait indépendante de la première. Soient deux stations A et B d'altitudes h et h' au-dessus de la

Fig. 38.



surface des mers, dont le rayon sera r_1, et AB la trajectoire curviligne d'un rayon de lumière allant de A en B ou de B en A. Soient encore z_1 et z'_1 les distances zénithales réciproques de ces deux points, ρ l'angle des tangentes extrêmes en A et B, v l'angle au centre C. Le quadrilatère formé par ces tangentes et

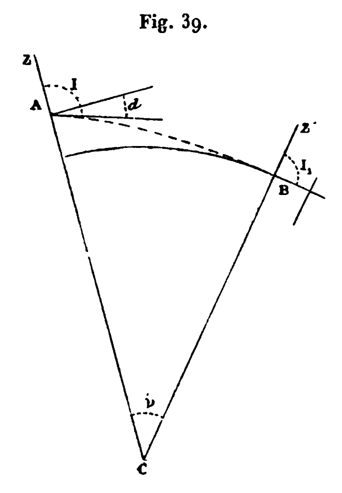
ces deux verticales $r_1 + h$, $r_1 + h'$ donne

$$z_1 + z'_1 + \rho = 180^\circ + \nu.$$

L'angle au centre ν est toujours connu ; les nivellements géodésiques fournissent donc à chaque opération la valeur correspondante de ρ. On a trouvé ainsi par tous les nivellements de ce genre, exécutés sur une très grande échelle dans toutes les parties du monde, que ρ est toujours une même fraction $\frac{1}{m}$ de l'angle au centre, absolument comme pour la réfraction astronomique. Il y a plus, la valeur de m ainsi trouvée s'accorde très bien avec celle que fournissent les observations astronomiques. Par les nivellements français, le colonel Peytier a trouvé 7,5 en moyenne; par ceux de l'Inde anglaise, le colonel Everest trouve 9, et par ceux de la Prusse, le général Bayer trouve 8; la moyenne 8,2 que nous adoptons diffère peu, comme on le voit, de 7,5.

Appliquons ces notions à l'étude de la dépression. La trajectoire lumineuse qui nous fait voir en A l'horizon B de la mer

Fig. 39.



doit être tangente en B au globe terrestre. Dès lors, l'équation fondamentale de toute réfraction atmosphérique,

$$rl \sin \mathrm{I} = r_1 l_1 \sin \mathrm{I}_1,$$

devient pour $I_1 = 90^\circ$, et en désignant par d la dépression, c'est-à-dire $I - 90^\circ$,

$$rl \cos d = r_1 l_1.$$

La loi de succession des indices étant, dans notre théorie, exprimée par la relation

$$rl^m = r_1 l_1^m \quad \text{ou} \quad \frac{r_1 l_1}{rl} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{1}{m}-1},$$

nous aurons

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{1-m}{m}} \cos d = 1,$$

formule rigoureuse qu'on simplifiera en posant $r = r_1 + h$ et en développant en série jusqu'aux termes du premier ordre en $\frac{h}{r_1}$, et du second ordre en d inclusivement. On a ainsi

$$1 - \tfrac{1}{2} d^2 = 1 = \frac{1-m}{m} \frac{h}{r_1}$$

et enfin

$$d = 206265'' \sqrt{\frac{2h}{r_1} \frac{m-1}{m}}.$$

La dépression géométrique en A, celle qu'on observerait s'il n'y avait pas d'atmosphère, s'obtiendrait en menant du point A une tangente AT au globe terrestre et en considérant le triangle rectangle ACT. On aurait ainsi, en appelant d' cette dépression, qui n'est autre chose que l'angle au centre ACT,

$$(r_1 + h) \cos d' = r_1, \quad \text{d'où} \quad d' = 206265'' \sqrt{\frac{2h}{r_1}}.$$

L'effet de la réfraction est donc de diminuer de $\frac{1}{16}$ environ la dépression géométrique, c'est-à-dire de relever un peu l'horizon de la mer. Pour une hauteur de l'œil égale à 6^m, hauteur habituelle sur les navires de taille moyenne, $d' = 4'\,43''$, dont le seizième est de $18''$; on aura donc

$$d = 4'25''.$$

Étude du coefficient de la réfraction géodésique.

Si l'on s'en tient aux réfractions astronomiques, m indique une rapidité moyenne de décroissement des indices ou des densités dans les couches de plus en plus élevées de l'atmosphère. Ces réfractions dépendent sans doute de cette loi, mais surtout de l'indice de la dernière couche, de celle où l'observateur est plongé avec son thermomètre et son baromètre. La réfraction géodésique, au contraire, dépend uniquement de m et varie avec lui. Or, dans les couches en contact avec le sol, il se produit souvent, sous l'action directe du Soleil, un échauffement notable du sol qui réagit immédiatement sur la densité des couches basses sans modifier sensiblement la loi générale de constitution de l'atmosphère. Si donc m est une constante, en Astronomie, pour tous les climats, toutes les saisons, toutes les heures du jour, sur les mers comme sur les continents, il n'en sera pas de même en Géodésie.

M. le colonel d'état-major Hossard a constaté en effet, par des observations précises, que m dépend du degré d'élévation du Soleil sur l'horizon ou, si l'on veut, de l'heure. De 10^h du matin à 3^h du soir, c'est une constante dont nous venons de fixer la valeur à 8,2; du moins, ses fluctuations ne dépassent pas $\pm 0,8$. Le soir, à partir de 3^h, m diminue peu à peu, très lentement d'abord, en sorte que la réfraction $\rho = \frac{v}{m}$ augmente. Cet effet, qui dépend évidemment du refroidissement du sol par voie de radiation vers le ciel, continue pendant la nuit et atteint son maximum le matin, entre 5^h et 6^h; puis, à partir de là, m augmente très rapidement jusqu'à 6^h, beaucoup moins de 6^h à 7^h, et revient ensuite à très peu près à la valeur constante qu'elle conserve dans les heures moyennes de la journée.

En mer, l'action échauffante du Soleil est beaucoup moindre; le refroidissement dû à la radiation est aussi très faible; m doit donc subir des variations moins sensibles. Aussi la Table suivante, calculée pour le coefficient $m = 8,2$, comptera-t-elle,

sans erreur appréciable, de 8^h du matin à 5^h ou 6^h du soir, en pleine mer bien entendu, loin de l'influence des côtes, qui modifient parfois la réfraction :

Hauteur de l'œil.	Dépression géométrique.	Dépression réelle.
m 1	1′.56″	1′.48″
2	2.44	2.33
3	3.20	3. 8
4	3.51	3.37
5	4.19	4. 2
6	4.43	4.25
7	5. 6	4.47
8	5.27	5. 6
9	5.47	5.25
10	6. 6	5.43
20	8.37	8. 4
30	10.33	9.53
40	12.11	11.25
50	13.38	12.46
100	19.16	18. 3

Les Tables de dépression ordinaires sont calculées avec la valeur $m = 6$, donnée autrefois par Delambre et déduite de dépressions mesurées au cercle répétiteur du haut d'une station terrestre.

Cette valeur est certainement erronée ; celle que nous lui avons substituée est beaucoup plus sûre. Cependant, comme cette valeur même ne répond qu'à des observations terrestres, il vaudrait sans doute mieux la déduire exclusivement de mesures prises en pleine mer. Il y a, en effet, quelque raison de croire que le décroissement initial des densités des couches atmosphériques n'est pas identiquement le même sur les continents et en pleine mer. Ainsi la dépression déduite de cent quarante-trois mesures recueillies par M. de Tessan dans le voyage de circumnavigation de la *Vénus* donne 4′34″ au lieu de 4′25″. Mais M. de Tessan lui-même ne considère pas cette valeur comme définitive.

Degré de précision des dépressions calculées.

Ces petites réfractions sont certainement exactes à o',1 près dans la partie moyenne du jour et même de 8^h du matin à 6^h du soir. Au delà de ces limites, surtout de grand matin, les variations horaires de la réfraction portent cette incertitude au double, peut-être même au triple.

Lorsque la mer est très agitée, la hauteur de l'œil au-dessus du niveau de la mer est variable; il suffit de consulter la Table précédente pour voir que ces variations modifient sensiblement la dépression géométrique elle-même. En outre, à l'horizon, la crête de fortes vagues surélève un peu le niveau apparent de la mer. Enfin, dans les parages où règnent des courants d'eau chaude, comme le *Gulf-stream,* la dépression diminue un peu. Mais, même dans les circonstances les plus défavorables, l'incertitude totale n'ira guère à plus de o',3 ou o',4.

Nous avons insisté sur cette question parce que certains physiciens, préoccupés des phénomènes du mirage, ont donné à croire que rien n'était plus changeant et variable que la dépression en mer. C'est une erreur. Dans tout le long voyage de circumnavigation de la *Vénus,* où la dépression a été l'objet d'une étude si attentive, on n'a rencontré qu'une seule fois un phénomène de ce genre; encore était-ce à proximité des côtes du Brésil, au moment d'entrer dans la rade de Rio-Janeiro. Dans ces occasions, si rares en pleine mer, la loi ordinaire de distribution en hauteur des couches à densités et à indices décroissants se trouve momentanément renversée. L'air, surchauffé au contact d'un sol brûlant, devient spécifiquement trop léger pour l'équilibre normal. La nappe inférieure, à l'état d'immobilité parfaite, est maintenue en place par les couches supérieures et ne peut s'élever. L'indice de réfraction de l'air va en croissant jusqu'à une certaine hauteur, à partir de laquelle il reprend sa marche décroissante habituelle. Comme un rayon de lumière est constamment dévié vers la région la plus dense, s'il y a au-dessous de l'œil et de l'objet un maximum

de densité, la trajectoire lumineuse qui nous fait voir l'objet se dédouble, l'une dans la situation ordinaire, mais très fortement courbée, l'autre ayant sa convexité tournée vers le sol comme si l'objet se mirait sur une nappe d'eau. Mais ces phénomènes répondent à un état d'équilibre instable de l'atmosphère tout à fait passager et exceptionnel. Les circonstances atmosphériques que le mirage exige sont très rares en pleine mer et disparaissent au moindre souffle d'air. D'ailleurs le cercle de réflexion, qui avec le petit miroir additionnel de M. Daussy permet de mesurer le double et même le quadruple de la dépression, fait immédiatement reconnaître cet état singulier et donne le double ou le quadruple de l'erreur.

Nous reviendrons sur la dépression à la fin de cet Ouvrage, à l'occasion du relèvement d'objets terrestres en vue.

CHAPITRE XIV.

LA CONNAISSANCE DES TEMPS.

Les Tables astronomiques permettent de calculer, pour le méridien de Paris, à une date quelconque, les coordonnées uranographiques du Soleil, des planètes principales et de la Lune. Mais, si les navigateurs étaient obligés d'exécuter eux-mêmes ces calculs, leur temps si précieux s'y consumerait entièrement. Le Bureau des Longitudes les fait faire; il publie chaque année, deux ou trois ans d'avance, les positions de tous les astres qu'il est utile d'observer en mer. Il n'y a plus qu'à prendre dans ce Recueil annuel les coordonnées dont on a besoin, à peu près comme on prend un logarithme dans une Table de Collet ou de Lalande. La comparaison est d'autant plus juste, que le Bureau des Longitudes s'attache à réduire les calculs d'interpolation à de simples parties proportionnelles. Dans ce but, il donne de dix en dix jours les Æ et δ des étoiles,

qui varient avec une extrême lenteur, tous les jours celles du Soleil et des planètes, toutes les heures celles de la Lune. Cependant les distances lunaires ne sont calculées que de trois en trois heures; elles exigent seules un calcul d'interpolation plus compliqué. Nous nous bornerons à indiquer ici les méthodes les plus simples.

L'argument est toujours le temps et procède par intervalles égaux. Nous le représenterons par $0, h, 2h, 3h, \ldots$, tandis que la fonction dont la *Connaissance des Temps* donne les valeurs correspondantes sera $f(0), f(h), f(2h), \ldots$. Désignons par $\Delta'_0, \Delta'_1, \Delta'_2, \ldots$ les premières différences

$$f(h)-f(0),\; f(2h)-f(h),\; f(3h)-f(2h),\; \ldots,$$

puis par $\Delta''_0, \Delta''_1, \Delta''_2, \ldots$ les différences secondes

$$\Delta'_1-\Delta'_0,\; \Delta'_2-\Delta'_1,\; \ldots,$$

et ainsi de suite. On formera le Tableau suivant :

Argument.	Fonction.	Première différence.	Deuxième différence.	Troisième différence.	Quatrième différence.
0	$f(0)$				
		Δ'_0			
h	$f(h)$		Δ''_0		
		Δ'_1		Δ'''_0	
$2h$	$f(2h)$		Δ''_1		Δ^{IV}_0
		Δ'_2		Δ'''_1	
$3h$	$f(3h)$		Δ''_2		
		Δ'_3			
$4h$	$f(4h)$				
....	.....				

Par des substitutions successives on a les relations

$$\begin{aligned}
f(h) &= f(0)+\Delta'_0,\\
f(2h) &= f(0)+2\Delta'_0+\Delta''_0,\\
f(3h) &= f(0)+3\Delta'_0+3\Delta''_0+\Delta'''_0,\\
f(4h) &= f(0)+4\Delta'_0+6\Delta''_0+4\Delta'''_0+\Delta^{IV}_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les coefficients de ces expressions sont ceux des divers termes du développement de $(1+x)^n$. On écrira donc (c'est la formule d'interpolation de Newton)

$$f(nh)=f(0)+n\Delta'_0+\frac{n.n-1}{1.2}\Delta''_0+\frac{n.n-h.n-2}{1.2.3}\Delta'''_0+\ldots.$$

La quantité n n'ayant été assujettie à aucune restriction, on

pourra lui assigner des valeurs quelconques positives ou négatives, entières ou fractionnaires.

EXEMPLE. — *La* Connaissance des Temps pour 1880 *donne le Tableau suivant des distances angulaires de la Lune à l'étoile Pollux pour le* 22 *février :*

Argument h.	Valeurs de la fonction.	Δ'.	Δ''.	Δ'''.	Δ^{iv}.
12^h......	9°.31'.16"				
		+ 1°. 4'.47"			
15......	10.36. 3		+ 6'.47"		
		+ 1.11.34		− 1'.44"	
18......	11.47.37		+ 5. 3		+ 29"
		+ 1.16.37		− 1.15	
21......	13. 4.14		+ 3.48		
		+ 1.20.25			
24......	14.24.39				

On demande la distance des deux astres pour $13^h 27^m 29^s$.

Ici $h = 3^h$ et n est une fraction exprimée par

$$\frac{1^h 27^m 29^s}{3^h} = \frac{1^h,45805}{3^h} = 0^h,48601.$$

En appliquant la formule ci-dessus, on a, pour la distance cherchée, comprise entre celles de 12^h et de 13^h, l'expression suivante, où les logarithmes des coefficients sont représentés par des nombres enfermés entre parenthèses,

$$9°31'16'' + (9{,}68665)\,3887'' - (9{,}09657)\,407'' - (8{,}7996)\,104'' - (8{,}578)\,29'',$$

et voici le résultat :

$$\begin{array}{r} 9°.31'.16'',0 \\ +\ 0.31.29,1 \\ -\ 0.\ 0.50,8 \\ -\ 0.\ 0.\ 6,6 \\ -\ 0.\ 0.\ 1,1 \\ \hline 10.\ 1.46,6 \end{array}$$

Le problème inverse de l'interpolation consiste à trouver la valeur de l'argument nh qui répond à une valeur assignée à la fonction.

EXEMPLE. — *A quelle heure la distance de la Lune à Pollux, le* 22 *février* 1880, *sera-t-elle égale à* 10°1'47" ?

L'inconnue est ici nh ou n. Ordonnons la formule de Newton suivant les puissances ascendantes de n :

$$f(nh) = f(0) + n \left| \begin{array}{l} \Delta'_0 \\ -\frac{1}{2}\Delta''_0 \\ +\frac{1}{3}\Delta'''_0 \\ -\frac{1}{4}\Delta^{IV}_0 \end{array} \right. + n^2 \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}\Delta''_0 \\ -\frac{1}{2}\Delta'''_0 \\ +\frac{11}{24}\Delta^{IV}_0 \end{array} \right. + n^3 \left| \begin{array}{l} \frac{1}{6}\Delta'''_0 \\ -\frac{1}{4}\Delta^{IV}_0 \end{array} \right. + n^4 \left| \frac{1}{24}\Delta^{IV}_0 \right. .$$

Avec les différences des divers ordres données ci-dessus, on formera l'équation de condition, $f(nh) - f(0)$ étant ici $10^\circ 1' 47'' - 9^\circ 31' 16'' = 1831''$,

$$1831'' = 3641'',6n + 268'',8n^2 - 24'',6n^3 + 1'',2n^4.$$

On a une première valeur de n en négligeant les termes en n^2, n^3, n^4. On trouve ainsi $\log n = 9,70140$. Avec cette valeur on calcule les termes suivants, que l'on retranche de $1831''$:

$$\begin{array}{rr} & 1831'',0 \\ - & 68,0 \\ + & 3,1 \\ - & 0,1 \\ \hline & 1766,0 \end{array}$$

De $1766'' = 3641'',6n$ on tire une nouvelle valeur de $\log n$ plus approchée que la précédente, à savoir $9,68570$, avec laquelle on recalcule les termes d'ordre supérieur, et il vient

$$\begin{array}{rr} & 1831'',0 \\ - & 63,2 \\ + & 2,8 \\ - & 0,1 \\ \hline & 1770,5 \end{array}$$

Une nouvelle approximation donnerait $1770'',2$ et par suite $\log n = 9,68674$; enfin $nh = 1^h,45834 = 1^h 27^m 30^s$.

On trouvera dans la *Connaissance des Temps*, à partir de 1880, des Tables destinées à abréger les calculs d'interpolation en tenant compte des troisièmes différences, qui ne sont pas négligeables dans le cas où les distances lunaires sont très petites.

Si l'on compare la série de Maclaurin

$$f(nh) = f(0) + nhf'(0) + \frac{n^2h^2}{1.2}f''(0) + \frac{n^3h^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots$$

à la précédente, il suffira de poser, pour les identifier,

$$f'(o) = \frac{1}{h}(\Delta'_0 - \tfrac{1}{2}\Delta''_0 + \tfrac{1}{3}\Delta'''_0 - \tfrac{1}{4}\Delta^{iv}_0),$$

$$f''(o) = \frac{1}{h^2}(\Delta''_0 - \Delta'''_0 + \tfrac{22}{24}\Delta^{iv}_0),$$

$$f'''(o) = \frac{1}{h^3}(\Delta'''_0 - \tfrac{3}{2}\Delta^{iv}_0),$$

$$f^{iv}(o) = \frac{1}{h^4}\Delta^{iv}_0.$$

On obtiendra donc par ces formules les valeurs que prennent les dérivées successives de la fonction pour les diverses valeurs de l'argument de l'éphéméride.

Voici un procédé fort simple qui permet de réduire beaucoup le travail de l'interpolation lorsque les différences troisièmes sont négligeables. Dans l'interpolation par parties proportionnelles, l'on se contente du premier terme et l'on écrit

$$f(nh) = f(o) + nhf'(o).$$

Si le temps, compté à partir d'une des dates de l'éphéméride, est exprimé au moyen de l'heure prise pour unité, $f'(o)$ prend le nom de *variation horaire* de la fonction. Il est clair qu'on néglige ici les termes dépendant des puissances supérieures du temps. Pour tenir compte de la deuxième puissance sans augmenter sensiblement le calcul, il suffit de calculer la dérivée première, non pour l'argument o, comme dans la formule précédente, mais pour l'argument intermédiaire entre o et nh, c'est-à-dire pour $\frac{nh}{2}$. En effet, écrivons les deux séries

$$f(o) = f\left(\frac{nh}{2} - \frac{nh}{2}\right)$$
$$= f\left(\frac{nh}{2}\right) - \frac{nh}{2}f'\left(\frac{nh}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{nh}{2}\right)^2 f''\left(\frac{nh}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{nh}{2}\right)^3 f'''\left(\frac{nh}{2}\right) + \ldots,$$

$$f(nh) = f\left(\frac{nh}{2} + \frac{nh}{2}\right)$$
$$= f\left(\frac{nh}{2}\right) + \frac{nh}{2}f'\left(\frac{nh}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{nh}{2}\right)^2 f''\left(\frac{nh}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{nh}{2}\right)^3 f'''\left(\frac{nh}{2}\right) + \ldots.$$

En prenant la différence, les termes d'ordre pair disparaissent, et il vient, si l'on néglige les termes dépendant du cube du temps,

$$f(nh) = f(0) + nhf'\left(\frac{nh}{2}\right),$$

formule très simple plusieurs fois appliquée dans les instructions de la *Connaissance des Temps*. On trouve en effet dans ce Recueil les variations horaires des divers éléments ; une simple interpolation permet de trouver la variation horaire répondant à une date quelconque, et par suite à la date intermédiaire $\frac{nh}{2}$. Mais ce procédé ne s'appliquerait pas à l'exemple précédent, parce que les différences troisièmes y sont trop sensibles.

L'examen des différences successives dans la Table des valeurs qu'une fonction quelconque prend, pour des arguments équidistants, sert à déceler des fautes de calcul ou d'impression, et même à les corriger. On ne trouvera jamais de fautes de calcul dans la *Connaissance des Temps*, dont tous les nombres sont revus avec grand soin avant d'être livrés à l'impression ; mais il peut se faire, à la rigueur, qu'une faute typographique échappe à la révision des épreuves. Le Tableau suivant montre l'influence d'une faute α sur les différences successives :

$$\begin{array}{lll}
f_0 & & \\
 & \Delta'_0 & \\
f_1 & & \Delta''_0 \\
 & \Delta'_1 & \\
f_2 & & \Delta''_1 + \alpha \\
 & \Delta'_2 + \alpha & \\
f_3 + \alpha & & \Delta''_2 - 2\alpha \\
 & \Delta'_3 - \alpha & \\
f_4 & & \Delta''_3 + \alpha \\
 & \Delta'_4 & \\
f_5 & & \Delta''_4 \\
 & \Delta'_5 & \\
f_6 & &
\end{array}$$

Si les différences secondes doivent être à peu pres constantes, comme dans le cas des grandes distances lunaires, la plus grande discordance se trouvera dans la ligne même où l'erreur α aura été commise et donnera à peu près le double de sa valeur.

Degré de précision des données de la *Connaissance des Temps.*

Ces données sont déduites des Catalogues d'étoiles et des Tables astronomiques avec plus de précision que celles-ci n'en comportent en réalité. Ainsi les Æ sont données au centième de seconde de temps, c'est-à-dire à moins de 0″,15, et les δ le sont au dixième de seconde d'arc. Or nos Catalogues les plus exacts des étoiles fondamentales n'ont pas partout ce degré d'exactitude. Quant au système solaire, la précision des Tables ne va pas au delà de 2″ à 3″ pour le Soleil, et de 5″ à 6″ pour les planètes. En d'autres termes, les Tables astronomiques ne représentent les observations actuelles qu'avec des erreurs de l'ordre que nous venons d'indiquer. Mais ces erreurs, qui ne vont même pas à 0′,1, peuvent être considérées comme négligeables pour les observations faites à la mer. Il n'en est plus de même des erreurs des Tables lunaires de Hansen, que le Bureau des Longitudes a dû adopter provisoirement pour le calcul des éphémérides de la Lune.

Lorsque ces Tables ont remplacé celles de Burckardt ou de Damoiseau, vers 1860, elles paraissaient offrir de grandes garanties d'exactitude, car leur savant auteur les avait arrangées de manière à représenter à 1″ près toute la série moderne des observations depuis 1750 jusqu'en 1850. On sait qu'une des grandes difficultés des Tables de la Lune consiste dans le très grand nombre de petites inégalités à courte période dont les mouvements de notre satellite sont affectés. L'avantage de celles de Hansen était précisément de tenir compte de toutes ces inégalités, tandis que les auteurs précédents avaient été forcés, pour ne pas augmenter démesurément le volume des Tables et la longueur des calculs, d'en laisser beaucoup de côté. Mais l'astronome allemand a introduit dans la théorie certaines inégalités à longue période dont les coefficients sont erronés. Par des compensations fortuites, ces erreurs se compensent dans le cours du siècle compris entre 1750 et 1850; mais, si l'on remonte plus haut, la compensation n'existe plus et

l'erreur des Tables en longitude va à $-200''$ en 850, à l'époque des observations des Arabes, et à $-960''$ à celle de Ptolémée. De même aujourd'hui l'erreur est de $+12''$ en 1878; elle ira à $+13'',2$ en 1880. Il en résulte que les Æ de la Lune, données d'après ces Tables par la *Connaissance des Temps*, sont actuellement trop fortes de $0^s,8$. L'erreur ira à bien près de 1^s en 1881. S'il ne s'agissait que de déterminer l'heure du bord et la colatitude par des distances zénithales de la Lune, l'erreur des Tables serait peu à craindre; mais, pour les distances lunaires destinées à fournir l'heure de Paris, il en est tout autrement. Là toute erreur sur ces distances est multipliée, dans le résultat conclu, par un facteur dont la valeur moyenne est 29 et qui va parfois à 40. Il en résulte qu'une erreur de $12''$ dans les données astronomiques produira à elle seule de $6'$ à $7'$ d'erreur sur la longitude ou de 24^s à 28^s d'erreur sur l'heure de Paris. Il est donc nécessaire de tenir compte de ces erreurs lorsqu'on veut obtenir les coordonnées ou les distances lunaires avec toute l'exactitude possible. C'est ce qu'on fera aisément en considérant les erreurs ci-dessus comme propres à la longitude écliptique L de la Lune et n'affectant pas sensiblement sa distance β au pôle de l'écliptique. Les formules de transformation qui servent à passer de L et de β à Æ et δ étant

$$\begin{aligned} \cos\delta &= \cos\omega\cos\beta + \sin\omega\sin\beta\cos L, \\ \sin\delta\sin Æ &= -\sin\omega\cos\beta + \cos\omega\sin\beta\cos L, \\ \sin\delta\cos Æ &= \sin\beta\cos L, \end{aligned}$$

formules où ω représente l'obliquité de l'écliptique ou $23°27'$, on aura, en différentiant par rapport à δ, Æ et L,

$$\begin{aligned} dÆ &= (\cos\omega + \sin\omega\cot\delta\sin Æ)\,dL, \\ d\delta &= -\sin\omega\cos Æ\,dL. \end{aligned}$$

Il suffira donc, pour avoir les corrections des données de la *Connaissance des Temps*, de faire $dL = 12''$ en 1878, $12'',5$ en 1879 et $13'',2$ en 1880.

Dans quelques années, le Bureau sera en mesure de substituer, aux Tables de Hansen, celles qu'on déduira de la théorie plus parfaite qu'en a donnée Delaunay.

THÉORIE DES ERREURS.

CHAPITRE XV.

MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

Toutes les mesures étant inévitablement entachées d'erreurs plus ou moins sensibles, il importe de se rendre compte de ces erreurs et de l'influence qu'elles ont sur les résultats qu'on déduit de ces mesures par le calcul. Si, par exemple, un observateur se flatte de mesurer en mer la distance zénithale d'un astre à la $\frac{1}{2}$ minute près, cette notion, très précieuse en elle-même, ne lui servira pas de grand'chose s'il n'est pas en état de calculer l'erreur qui peut résulter de cette $\frac{1}{2}$ minute sur l'heure ou sur la colatitude conclue. On retrouve d'ailleurs cette nécessité d'apprécier les erreurs et leur influence possible dans toutes les sciences d'observation et de mesure. Nous y parviendrons en considérant d'abord les cas les plus simples, cas où les règles relatives aux erreurs sont pour ainsi dire évidentes, et nous étendrons, par voie d'analogie, ces règles aux cas plus compliqués.

D'abord il est essentiel de distinguer entre les erreurs accidentelles et les erreurs systématiques. Les premières ne suivent aucune loi; on ne peut leur assigner d'autre cause que l'imperfection de nos sens; elles sont indifféremment positives ou négatives; elles ne dépassent pas, dans chaque genre d'observation ou de mesure, certaines limites assignables. Les plus fréquentes sont les plus petites; les grosses erreurs, celles qui s'approchent de la limite de possibilité, sont de beaucoup les plus

rares. On peut, en un mot, les assimiler aux écarts d'un tireur qui vise toujours le même but avec une attention soutenue et une arme sans défaut. Si l'on relève les coups après un certain nombre d'essais, on verra que le plus grand nombre s'écarte fort peu du but, indifféremment à gauche et à droite. Cela est tellement vrai, que, si la plupart des coups portaient à droite, par exemple, on en conclurait aussitôt que l'arme doit avoir une petite déviation en ce sens, et ce serait alors une erreur systématique qu'on s'efforcerait de corriger dans l'arme elle-même. On notera bien, sur un grand nombre de coups, des écarts plus notables que les autres, mais ils seront relativement très peu nombreux. L'examen du Tableau de ces écarts donnera à juger, *a posteriori* il est vrai, mais d'une manière très plausible, du degré d'habileté du tireur et de la perfection de son arme. Il est d'ailleurs tel écart que tout le monde jugera impossible, en sorte que, s'il venait à s'en produire un, on en conclurait qu'une cause étrangère a dû intervenir cette fois-là.

Les erreurs systématiques, au contraire, suivent une loi déterminée. Telle serait, pour le tir, une fausse position d'un des points qui déterminent sur l'arme la ligne de visée. L'erreur pour une distance donnée serait toujours la même et, pour diverses positions du but, croîtrait proportionnellement à la distance. Telle serait aussi une erreur d'excentricité dans le sextant, erreur qui croît avec le sinus de l'angle mesuré à partir d'une certaine origine. Telle serait encore l'erreur commise par un calculateur qui omettrait de tenir compte de la réfraction dans les distances zénithales des astres. Cette erreur irait en croissant, d'un astre à l'autre, avec la tangente de la distance angulaire au zénith. Cette seconde catégorie d'erreurs est d'une importance extrême dans la pratique, mais on peut en découvrir les lois, en déterminer les constantes et finalement en débarrasser les observations. Nous les avons étudiées à part; il n'en sera plus question dans ce qui va suivre, mais seulement des erreurs accidentelles.

Examinons d'abord le cas le plus simple, celui où l'on a mesuré directement une grandeur x pour laquelle on a obtenu les

évaluations n, n', n'', ... en nombre m. C'est comme si l'on devait déterminer x de manière à satisfaire le mieux possible aux équations suivantes :

$$x = n,$$
$$x = n',$$
$$x = n'',$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Si ces mesures ne sont affectées que d'erreurs purement accidentelles, celles-ci seront indifféremment positives et négatives; en outre, les plus nombreuses de beaucoup seront les plus petites. Il en résulte qu'en prenant la moyenne de ces équations il y aura une large compensation de ces erreurs. Si par hasard il se trouvait quelque grosse erreur (grosse dans les limites admissibles, bien entendu) qui ne fût pas annulée par une erreur égale et de signe contraire, elle serait du moins fortement diminuée par le diviseur m, nombre des équations. L'équation résultante

$$x = \frac{n + n' + n'' + \ldots}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{[n]}{m} \text{ (1)}$$

sera donc beaucoup plus exacte que chacune des proposées prise en particulier, pourvu que m soit un assez grand nombre.

D'après cela, nous aurons une idée très approchée des erreurs accidentelles qui auront été réellement commises dans chaque mesure partielle si nous portons cette valeur de x dans les équations. Ces équations ne seront pas satisfaites rigoureusement; elles laisseront de petits résidus qui représenteront à très peu près les erreurs commises. Désignons-les par ε, ε', ε'', ... D'après cela,

$$x - n = \varepsilon,$$
$$x - n' = \varepsilon',$$
$$x - n'' = \varepsilon'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

x ayant ici la valeur ci-dessus $\frac{[n]}{m}$. Il est facile de voir que la

(1) En représentant la somme de termes semblables par l'un d'eux enfermé dans les crochets [ ].

somme de ces résidus est nulle, car, si l'on remplace x par sa valeur, cette somme devient

$$\frac{n+n'+n''+\ldots}{m}-n+\frac{n+n'+n''+\ldots}{m}-n'+\frac{n+n'+n''+\ldots}{m}-n''+\ldots,$$

somme qui se réduit évidemment à zéro.

Cela posé, remarquons que cette même expression

$$(x-n)+(x-n')+(x-n'')+\ldots$$

est, à un facteur constant près (le facteur 2), la dérivée par rapport à x de la somme des carrés des erreurs :

$$(x-n)^2+(x-n')^2+(x-n'')^2+\ldots.$$

Puisque cette dérivée est nulle, il en résulte que la somme des carrés des erreurs est un minimum. Cela veut dire que toute autre valeur que la moyenne $\frac{[n]}{m}$, mise à la place de x dans les équations proposées, donnerait une plus forte somme des carrés des résidus.

Si l'on avait une autre série de m mesures de la même grandeur, faites avec moins de soin et avec des instruments plus grossiers, la somme des résidus relatifs à la moyenne serait encore nulle, mais la somme de leurs carrés serait plus forte. On peut donc considérer cette somme des carrés, réduite au minimum, comme un moyen d'apprécier la précision de ces m mesures. Dès lors, pour juger de la précision d'une mesure isolée, il suffira de prendre la moyenne des carrés des résidus, c'est-à-dire $\frac{\varepsilon\varepsilon+\varepsilon'\varepsilon'+\varepsilon''\varepsilon''+\ldots}{m}=\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}$, et d'en extraire la racine carrée. L'erreur moyenne d'une mesure isolée sera donc $\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}}$.

Équations de condition de forme quelconque.

Il arrive souvent que la quantité à déterminer au moyen d'une série de mesures ne dépend pas de celles-ci par une re-

lation aussi simple que $x = n$, et même, dans le cas le plus général, on aura plusieurs inconnues à déterminer à la fois, inconnues reliées aux quantités mesurées par une relation de la forme

$$f(A, B, C, \ldots, t) = N,$$

t étant une variable indépendante, le temps par exemple, A, B, C, ... des constantes qui entrent dans l'expression analytique de la loi, et N une quantité fournie par l'observation. Si l'on possède m mesures N, N', N'', ... répondant à diverses valeurs t, t', t'', ... de l'argument t, on formera m équations de la forme

$$\begin{aligned} f(A, B, C, \ldots, t) &= N, \\ f(A, B, C, \ldots, t') &= N', \\ f(A, B, C, \ldots, t'') &= N'', \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \end{aligned}$$

Appliquons à ce système la règle précédente, c'est-à-dire cherchons à déterminer les constantes inconnues A, B, C, ... à l'aide de ces m équations (m étant bien supérieur au nombre desdites inconnues), de manière que la somme des carrés des résidus, c'est-à-dire

$$[f(A, B, C, \ldots, t) - N]^2 + [f(A, B, C, \ldots, t') - N']^2 + \ldots,$$

soit un minimum. Pour cela il faut et il suffit que les dérivées de cette somme prises 1° par rapport à A, 2° par rapport à B, 3° par rapport à C, etc., inconnues que nous supposerons indépendantes les unes des autres, soient séparément nulles. Ces conditions du minimum nous fourniront autant d'équations finales entre A, B, C, ... et N, N', N'', ... qu'il y a d'inconnues, système qu'on résoudra par les méthodes habituelles de l'Algèbre.

Équations de condition ramenées à la forme linéaire.

Ces calculs seraient bien souvent inextricables; heureusement les circonstances ordinaires de la pratique nous permettent de les simplifier considérablement. En effet, dans la pra-

tique, on connaît toujours d'avance des valeurs plus ou moins approchées des inconnues A, B, C, ... Par exemple, dans l'Astronomie nautique, l'estime fournit des valeurs approchées des inconnues λ et L. Désignons-les ici par A', B', C', ..., et par x, y, z, ... les petites corrections dont ces valeurs provisoires ont besoin, en sorte qu'on ait

$$A = A' + x, \quad B = B' + y, \quad C = C' + z, \quad \ldots.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation générale et développons le premier membre en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier, c'est-à-dire les termes $x^2, y^2, z^2, \ldots$ ou $xy, yz, \ldots$, ainsi que les suivants, nous aurons

$$f(A', B', C', \ldots, t) + \frac{df}{dA}x + \frac{df}{dB}y + \frac{df}{dC}z + \ldots = N,$$

équation linéaire en x, y, z, ... qu'on écrira

$$ax + by + cz + \ldots = n,$$

en désignant par n la différence immédiatement calculable

$$N - f(A', B', C', \ldots, t).$$

Dès lors, il est bien facile d'appliquer à la résolution des m équations linéaires

$$\begin{aligned} ax + by + cz + \ldots &= n, \\ a'x + b'y + c'z + \ldots &= n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

la condition de rendre minimum la somme des carrés des résidus ou erreurs, c'est-à-dire

$$(ax + by + cz + \ldots - n)^2 + (a'x + b'y + c'z + \ldots - n')^2 + \ldots.$$

Réduisons les inconnues à trois pour fixer les idées et écrivons que la dérivée de la somme précédente, prise par rapport à x, est nulle; nous aurons l'équation finale en x

$$2a(ax + by + cz - n) + 2a'(a'x + b'y + c'z - n') + \ldots = 0.$$

Supprimons le facteur 2 et désignons par $[aa]$, $[ab]$, ... les

sommes telles que

$$aa + a'a' + a''a'' + \ldots \quad \text{ou} \quad ab + a'b' + a''b'' + \ldots .$$

Cette équation prendra la forme

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z = [an].$$

En opérant de même pour y et pour z, nous aurons les deux dernières équations finales

$$\begin{aligned} [ab]x + [bb]y + [bc]z &= [bn], \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z &= [cn]. \end{aligned}$$

Ces trois équations finales nous donneront pour x, y, z un système de valeurs jouissant de la propriété de rendre minimum la somme des carrés des résidus. Tout autre système de valeurs qu'on assignerait à x, y, z dans les m équations de condition donnerait une plus grande somme pour les carrés des résidus. La règle est donc :

Pour former l'équation en x, ajouter toutes les équations de condition après avoir multiplié chacune d'elles par le coefficient de x dans cette équation. Opérer de même pour les équations finales relatives à y et à z.

On voit que cette prescription revient au fond, pour former l'équation finale en x, à donner une grande prépondérance aux équations de condition où x a les plus forts coefficients, et de plus à changer tous les signes des équations où x a un coefficient négatif. Ainsi, dans l'exemple suivant,

$$\begin{aligned} 3{,}0x + 1{,}4y &= 0{,}4, \\ -1{,}2x + 3{,}0y &= 1{,}5, \\ 0{,}1x + 2{,}0y &= 1{,}0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots, \end{aligned}$$

pour former l'équation finale en x, on doit faire la somme des équations ainsi transformées :

$$\begin{aligned} 9{,}00x + 4{,}2y &= 1{,}2, \\ 1{,}44x - 3{,}6y &= -1{,}8, \\ 0{,}01x + 0{,}2y &= 0{,}1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et l'on voit que la troisième se trouve presque sans influence sur la somme.

On faisait quelque chose de cela autrefois, avant l'introduction de la méthode des moindres carrés par Legendre, car, pour former l'équation en x, on ajoutait ensemble les équations où x avait un fort coefficient, après avoir changé de signe celles où ce coefficient de x était négatif, et l'on négligeait les équations dans lesquelles x avait un coefficient très faible, tandis que les autres inconnues s'y trouvaient multipliées par des nombres un peu forts. Mais la méthode des moindres carrés a l'avantage de donner à chaque équation, à chaque mesure par conséquent, l'influence qui lui revient réellement, de bannir tout arbitraire dans l'appréciation de l'importance de telle ou telle équation, et d'aboutir, en outre, au système de valeurs *les plus probables* pour les inconnues, ce qui sera pleinement démontré plus loin.

CHAPITRE XVI.

ERREUR MOYENNE DES OBSERVATIONS.

Si nous portons les valeurs de x, y, z ainsi trouvées dans les m équations primitives, nous aurons m résidus $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ tels que la somme de leurs carrés

$$\varepsilon\varepsilon + \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon''\varepsilon'' + \ldots \text{ ou bien } [\varepsilon\varepsilon]$$

soit un minimum. Il est donc naturel de prendre, comme dans le cas de la moyenne arithmétique, la moyenne de ces m carrés, ou $\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}$ pour la valeur moyenne des carrés des erreurs, ou $\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}}$ pour l'erreur moyenne.

Cependant il est essentiel de remarquer ici que, si nous n'a-

vions que trois équations de condition au lieu de m, en les résolvant nous aurions un système de valeurs pour x, y, z qui ne laisserait aucun résidu dans ces équations. Nous n'avons en réalité, malgré nos m résidus, que $m - 3$ données distinctes pour juger des erreurs; $\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}}$ donnerait une idée trop avantageuse du degré de précision des mesures. On est donc conduit à adopter $m - 3$ et non m pour dénominateur. D'après cela nous prendrons pour *erreur moyenne* d'une observation $\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-i}}$, i étant le nombre des inconnues, et nous la désignerons en général par ε_1.

Erreur moyenne d'une fonction quelconque de quantités d'une précision donnée.

Soit $U = f(A, B, C, \ldots)$ une fonction des quantités A, B, C pour lesquelles les erreurs à craindre ou les erreurs moyennes soient respectivement

$$\pm\alpha, \quad \pm\beta, \quad \pm\gamma.$$

Lorsque A, B, C varieront de quantités de cet ordre-là, U variera lui-même d'une petite quantité u qu'il faut déterminer et que nous considérons, sous certaines conditions, comme l'erreur à craindre sur U. Or, α, β, γ étant de très petites quantités dont on peut négliger les puissances supérieures et les produits dans le développement suivant,

$$U \pm u = f(A, B, C, \ldots) \pm \frac{df}{dA}\alpha \pm \frac{df}{dB}\beta \pm \frac{df}{dC}\gamma,$$

ou bien

$$\pm u = \pm\frac{df}{dA}\alpha \pm \frac{df}{dB}\beta \pm \frac{df}{dC}\gamma,$$

si nous formions des relations de ce genre pour toutes les valeurs qu'il est permis d'attribuer à α, β, γ, nous aurions les valeurs correspondantes de u. Par conséquent, nous aurions la valeur moyenne de u en prenant la racine carrée de la somme des carrés de toutes ses valeurs particulières divisée par leur

nombre. Or, si nous laissons ces valeurs particulières sous la forme susdite, en faisant la somme des carrés, tous les doubles produits tels que $2\frac{df}{dA}\frac{df}{dB}\alpha\beta\ldots$ disparaîtront, puisqu'à chaque valeur positive de α ou de β ou de γ correspond une valeur négative de même ordre de grandeur (d'après le caractère même des erreurs accidentelles). On aura donc finalement, en prenant la racine carrée de la moyenne de cette somme de carrés,

$$u = \pm\sqrt{\left(\frac{df}{dA}\right)^2\alpha^2 + \left(\frac{df}{dB}\right)^2\beta^2 + \left(\frac{df}{dC}\right)^2\gamma^2},$$

puisque α^2, β^2, γ^2 sont considérés comme les moyennes des carrés de toutes les erreurs dont A, B, C sont susceptibles.

Cela revient à différentier U par rapport à A, B, C, à remplacer dA, dB, dC par α, β, γ et à extraire la racine carrée de la somme des carrés de ces différentielles partielles.

APPLICATIONS. — *Nous avons trouvé pour la moyenne de m mesures n, n', n'' d'une quantité x*

$$x = \frac{[n]}{m},$$

et, en désignant par ε, ε', ... *les écarts des mesures individuelles avec la moyenne, nous avons vu que l'erreur moyenne d'une mesure est*

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}} \text{ ou plutôt } \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-1}}.$$

Quelle sera l'erreur à craindre sur la moyenne elle-même?

Ici x est une fonction bien simple des mesures n, n', n'', ..., car

$$x = \frac{n}{m} + \frac{n'}{m} + \frac{n''}{m} + \ldots.$$

L'erreur moyenne de ces divers termes est $\pm\frac{\varepsilon_1}{m}$; donc celle de x sera

$$\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2 + \ldots} = \pm\sqrt{m\left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2} = \pm\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}.$$

Par exemple, l'erreur moyenne à craindre sur la moyenne de 100 mesures effectuées à 1′ près sera, non pas $\frac{1'}{100}$, mais $\frac{1'}{10}$, et, pour réduire de moitié l'erreur à craindre sur des mesures faites à la minute près, il faut prendre la moyenne de 4 mesures indépendantes. En d'autres termes, la précision d'une moyenne n'est pas proportionnelle au nombre des mesures individuelles, mais seulement à la racine carrée de ce nombre.

SECONDE APPLICATION. — *Pour obtenir la surface d'un rectangle, on en a mesuré les côtés a et b, le premier avec une erreur moyenne $\pm\alpha$, le second à $\pm\beta$ près. Quelle est l'erreur à craindre sur la surface conclue ab?*

On aura pour cette erreur

$$\pm\sqrt{(b\alpha)^2+(a\beta)^2}.$$

De même l'erreur à craindre sur une ligne a mesurée en deux parts b et c, de sorte que $a=b+c$, sera

$$da=\pm\sqrt{(db)^2+(dc)^2},$$

en donnant aux différentielles da, db, dc le sens d'erreurs moyennes.

Enfin, si l'angle a est calculé par l'analogie des quatre sinus,

$$\sin a\sin B=\sin b\sin A,$$

nous aurons, en différentiant cette expression après en avoir pris les logarithmes,

$$\frac{da}{\tan a}=\frac{db}{\tan b}+\frac{dA}{\tan A}-\frac{dB}{\tan B},$$

puis, en donnant aux différentielles la signification d'erreurs moyennes,

$$da=\pm\tan a\sqrt{\left(\frac{db}{\tan b}\right)^2+\left(\frac{dA}{\tan A}\right)^2+\left(\frac{dB}{\tan B}\right)^2}.$$

Erreur moyenne des solutions fournies par la méthode de Legendre.

Soit, pour fixer les idées, m équations à deux inconnues

$$\begin{aligned} ax + by &= n, \\ a'x + b'y &= n', \\ a''x + b''y &= n'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les équations finales seront

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y &= [an], \\ [ab]x + [bb]y &= [bn]. \end{aligned}$$

Pour avoir l'erreur de x en fonction des erreurs ε, ε', ε'', ... des données n, n', n'', ..., différentions x par rapport à ces quantités, conformément à la prescription du paragraphe précédent. Puisque

$$x = \frac{(an)(bb) - (ab)(bn)}{(aa)(bb) - (ab)^2},$$

nous aurons, en désignant pour un instant le dénominateur par D,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}dx = &\left\{[bb]a - [ab]b\right\}dn, \\ &+ \left\{[bb]a' - [ab]b'\right\}dn', \\ &+ \left\{[bb]a'' - [ab]b''\right\}dn'' + \ldots. \end{aligned}$$

Par suite, on aura, en faisant la somme des carrés de ces termes en dn, dn', dn'', ... et en remplaçant dn^2, dn'^2, dn''^2, ... par leur valeur moyenne ε_1^2,

$$\mathrm{D}^2 dx^2 = \left\{[bb]^2[aa] + [ab]^2[bb] - 2[bb][ab][ab]\right\}\varepsilon_1^2.$$

Si l'on réduit les termes semblables, et que l'on mette $[bb]$ en facteur commun, cette équation devient

$$\mathrm{D}^2 dx^2 = [bb]\mathrm{D}\varepsilon_1^2, \quad \text{d'où} \quad dx = \sqrt{\frac{[bb]}{\mathrm{D}}}\,\varepsilon_1.$$

Or $\frac{[bb]}{\mathrm{D}}$ est la valeur qu'on obtiendrait pour x lui-même si

dans les équations finales on remplaçait $[an]$ par 1 et $[bn]$ par 0.

De même l'erreur moyenne de y ou dy sera $\sqrt{\frac{[aa]}{D}}\,\varepsilon_1$, c'est-à-dire ε_1 multiplié par la racine carrée de la valeur qu'on déduirait pour y si dans les équations finales on remplaçait an par 0 et bn par 1.

S'il y avait trois inconnues, on aurait pareillement à résoudre les équations finales

$$\begin{aligned}
[aa]x+[ab]y+[ac]z&=[an],\\
[ab]x+[bb]y+[bc]z&=[bn],\\
[ac]x+[bc]y+[cc]z&=[cn].
\end{aligned}$$

Les valeurs de $x, y, z, \ldots$ étant obtenues, on aurait leurs erreurs moyennes en remplaçant x, y, z par x', y', z' et en résolvant trois fois les mêmes équations avec les seconds membres remplacés successivement par

$$\begin{array}{lll}
1,\ 0,\ 0 & \text{pour } x',\\
0,\ 1,\ 0 & \text{pour } y',\\
0,\ 0,\ 1 & \text{pour } z',
\end{array}$$

et les erreurs moyennes de x, y, z seraient $\varepsilon_1\sqrt{x'}$, $\varepsilon_1\sqrt{y'}$, $\varepsilon_1\sqrt{z'}$.

Application de la méthode des moindres carrés à un exemple.

Les hommes de science qui ont du temps à eux, et qui veulent tirer tout le parti possible des observations dont ils disposent, doivent recourir à cette méthode pour résoudre un système de m équations à i inconnues lorsque $m > i$; encore faut-il que la loi du phénomène dont il s'agit soit bien connue et qu'il ne reste à en déterminer que les constantes. Nous sommes donc bien éloignés de faire aux navigateurs une obligation d'y recourir en toutes circonstances. La méthode ancienne, que nous avons employée dans le cours de cet Ouvrage, suffira le plus souvent, tout en exigeant beaucoup moins de temps et de calculs. Cependant il faut connaître la méthode

de Legendre et savoir l'appliquer au besoin, parce qu'elle donne les valeurs les plus probables des inconnues, et que seule elle permet d'apprécier leur degré de précision. En voici un exemple.

La longueur l du pendule simple qui bat la seconde est liée à l'aplatissement μ du globe terrestre par l'équation de Clairaut,

$$l = l' + \left(\tfrac{5}{2}q - \mu\right) l' \cos^2\lambda,$$

où l' représente la longueur du pendule à l'équateur, q le rapport $\frac{1}{289}$ de la force centrifuge à la pesanteur, toujours à l'équateur, et λ la colatitude. Voici diverses mesures de l effectuées en divers points du globe par des navigateurs :

	λ.	l.
	° ′	mm
Au Spitzberg	10.10	996,13
Saint-Pétersbourg . .	30. 3	994,97
New-York	49.17	993,24
La Jamaïque........	72. 4	991,56
Ile Saint-Thomas . . .	89.35	991,19
Rio-de-Janeiro......	112.55	991,77
Montevideo.........	124.54	992,70
Cap Horn	145.51	994,62
New-Shetland	152.56	995,23

Posons, pour abréger,

$$l = 991^{\text{mm}} + x, \quad \left(\tfrac{5}{2}q - \mu\right) l' = y;$$

nous aurons, pour déterminer x et y, les équations

$$\begin{aligned}
\overset{\text{m}}{5{,}13} &= x + 0{,}969y,\\
3{,}97 &= x + 0{,}749y,\\
2{,}24 &= x + 0{,}426y,\\
0{,}56 &= x + 0{,}095y,\\
0{,}19 &= x,\\
0{,}77 &= x + 0{,}152y,\\
1{,}70 &= x + 0{,}327y,\\
3{,}62 &= x + 0{,}685y,\\
4{,}23 &= x + 0{,}793y.
\end{aligned}$$

La première équation finale (relative à x) s'obtient simplement en faisant la somme de ces équations :

$$(1)\qquad 22,41 = 9x + 4,196y.$$

Pour avoir l'équation relative à y, multipliez chacune des équations proposées par le coefficient correspondant de y :

$$\begin{aligned}
\overset{\text{m}}{4},97 &= 0,969x + 0,938y,\\
2,97 &= 0,749x + 0,561y,\\
0,95 &= 0,426x + 0,181y,\\
0,05 &= 0,095x + 0,009y,\\
0 \quad & \quad 0 \quad\quad 0\\
0,12 &= 0,152x + 0,023y,\\
0,56 &= 0,327x + 0,107y,\\
2,48 &= 0,685x + 0,469y,\\
3,35 &= 0,793x + 0,629y.
\end{aligned}$$

Leur somme fournit l'équation

$$(2)\qquad 15,45 = 4,196x + 2,917y.$$

La résolution des équations (1) et (2) donne

$$x = 0^{\text{mm}},066,$$
$$y = 5^{\text{mm}},20;$$

par conséquent, la longueur du pendule est

A l'équateur.......	$991^{\text{mm}},066$
Aux pôles.........	$996^{\text{mm}},266$

Remarquez que y est une fonction de l'aplatissement μ ; connaissant actuellement y, nous en pourrons déduire μ par la relation

$$\left(\tfrac{5}{2}\tfrac{1}{289} - \mu\right) 991,066 = 5,20;$$

elle donne

$$\mu = \tfrac{1}{294}.$$

Il nous reste à déterminer l'erreur à craindre sur chaque résultat. Pour cela, il faut chercher d'abord l'erreur moyenne de ces mesures de l. En substituant dans les équations de con-

dition les valeurs de x et de y, nous aurons les résidus ε, ε', ε'', . . . :

Nombres observés.	Nombres calculés.	Calc. — obs. ou valeurs de ε.	Carrés, c'est-à-dire $\varepsilon\varepsilon$.
5,13	5,11	— 0,02	0,0004
3,97	3,96	— 0,01	0,0001
2,24	2,28	+ 0,04	0,0016
0,56	0,56	0	0
0,19	0,07	— 0,12	0,0144
0,77	0,86	+ 0,09	0,0081
1,70	1,77	+ 0,07	0,0049
3,62	3,63	+ 0,01	0,0001
4,23	4,19	— 0,04	0,0016
			0,0272

La somme $[\varepsilon\varepsilon] = 0,0272$; par conséquent, l'erreur moyenne d'une de ces mesures sera

$$\sqrt{\frac{0,0272}{9-2}} = \pm\, 0^{mm},067 = \varepsilon_1,$$

puisque 9 est le nombre des équations et 2 celui des inconnues.

Quant à l'erreur à craindre sur les nombres trouvés pour x et y, nous résoudrons les deux systèmes :

$$\left.\begin{array}{l} 9,000x' + 4,196y' = 1 \\ 4,196x' + 2,917y' = 0 \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{1}{2,96},$$

$$\left.\begin{array}{l} 9,000x' + 4,196y' = 0 \\ 4,196x' + 2,917y' = 1 \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad y' = \frac{1}{0,96}.$$

Par suite, l'erreur à craindre sur x, ou $\varepsilon_1\sqrt{x'}$, sera

$$\pm\frac{0^{mm},067}{\sqrt{2,96}} = \pm\, 0^{mm},039,$$

et sur y

$$\varepsilon_1\sqrt{y'} = \pm\frac{0^{mm},067}{0,96} = \pm\, 0^{mm},068.$$

Il est très intéressant de savoir avec quelle précision l'aplatissement μ est déterminé par ces mesures du pendule en divers lieux de la Terre. La relation

$$\left(\tfrac{5}{2}\tfrac{1}{289} - \mu\right)(991^{mm} + x) = y$$

donne, en différentiant par rapport à μ, x, y, mais en remarquant que dx peut être négligé à cause du très petit facteur qui le multiplie,

$$d\mu = \pm \frac{dy}{99^1} = \pm 0,000068.$$

Cela revient à dire que l'incertitude du dénominateur de $\frac{1}{294}$, valeur trouvée pour μ, est de ± 6 unités.

CHAPITRE XVII.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS A LA THÉORIE DES ERREURS.

La théorie des erreurs fortuites d'observation ou de mesure rentre évidemment dans celle des probabilités. Il nous suffira de rappeler ici la définition de la probabilité mathématique d'un événement et le théorème de Moivre sur les probabilités composées.

Définition. — *La probabilité d'un événement est le rapport du nombre des chances favorables à cet événement au nombre total des chances favorables ou défavorables.*

Si une urne contient 100 boules blanches et 500 boules noires, la probabilité de tirer de cette urne une boule blanche sera $\frac{100}{600} = \frac{1}{6}$.

Si l'on jette un dé qui a six faces numérotées de 1 à 6, la probabilité d'amener un de ces numéros, 2 par exemple, sera $\frac{1}{6}$.

D'après cette définition, une probabilité exprimée en nombres est toujours une fraction; l'unité représente la certitude.

Théorème. — *La probabilité de la production simultanée de plusieurs événements indépendants les uns des autres est le produit des probabilités relatives à chacun de ces événements pris à part.*

Par exemple, si l'on joue avec deux dés, la probabilité d'amener *sonnez*, c'est-à-dire les deux 6, sera $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Si l'on a trois urnes contenant l'une 25 boules noires pour 75 boules blanches, la deuxième 50 boules noires et 50 boules blanches, la troisième 75 boules noires et 25 blanches, la probabilité de tirer trois boules noires en puisant une fois dans chaque urne sera

$$\frac{25}{100} \times \frac{50}{100} \times \frac{75}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}.$$

Un caractère constamment remarqué dans les erreurs accidentelles commises dans une série de mesures quelconques, c'est que les petites erreurs sont les plus nombreuses; les autres le sont d'autant moins qu'elles sont plus fortes. Il pourrait donc exister une relation assignable en nombres entre la grandeur de ces erreurs fortuites et leur probabilité.

Recherche empirique de cette loi.

Prenons, en premier lieu, des observations astronomiques. Pour déterminer la position du point vernal, origine des ascensions droites, Bradley a observé 470 fois, à la lunette méridienne de l'observatoire de Greenwich, la différence d'Æ entre le Soleil et une certaine étoile. Bessel a réduit avec beaucoup de soin ces 470 observations, dont la moyenne donne la position du point vernal d'une manière très exacte. En comparant cette moyenne avec chaque observation, on obtient 470 écarts, qui représentent à très peu près les erreurs réellement commises. On a obtenu ainsi, pour l'erreur moyenne $\varepsilon_1 = \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon\varepsilon)}{470 - 1}}$, la valeur $\pm 0^s,39$. C'est l'erreur à craindre sur une mesure isolée. Quant à l'erreur à craindre sur la moyenne, elle se réduit, comme nous l'avons vu, à

$$\pm \frac{0^s,39}{\sqrt{470}} = 0^s,017.$$

On voit donc que cette moyenne est à très peu près l'ex-

pression de la vérité; par suite, les 470 écarts ci-dessus mentionnés représentent de très près les erreurs réellement commises.

Or, en examinant le Tableau de ces 470 erreurs, on trouve, quant aux signes, qu'elles sont indifféremment et en pareils nombres positives ou négatives; quant à leur grandeur, on trouve que

entre	$0^s,0$	et	$0^s,1$	il y a	94	erreurs,	tant positives	que négatives.
»	0,1	»	0,2	»	88		»	»
»	0,2	»	0,3	»	78		»	»
»	0,3	»	0,4	»	58		»	»
»	0,4	»	0,5	»	51		»	»
»	0,5	»	0,6	»	36		»	»
»	0,6	»	0,7	»	26		»	»
»	0,7	»	0,8	»	14		»	»
»	0,8	»	0,9	»	10		»	»
»	0,9	»	1,0	»	7		»	»
au-dessus	de		1,0	»	8		»	»

Ainsi, à en juger par cette série, la probabilité qu'une erreur soit comprise entre 0^s et $0^s,1$, c'est-à-dire le rapport

$$\frac{\text{nombre des erreurs de cet ordre}}{\text{nombre total des erreurs}}, \quad \text{est} \quad \frac{94}{470},$$

tandis que la probabilité des erreurs plus fortes, c'est-à-dire $\frac{88}{470}$, $\frac{78}{470}$, ..., va en décroissant.

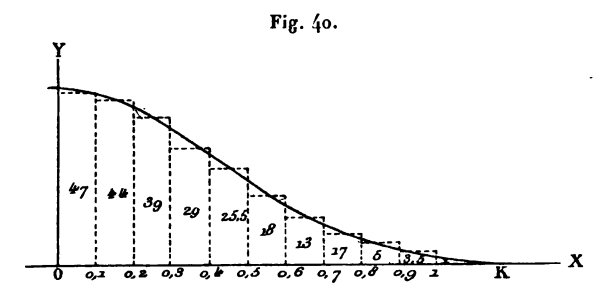
Évidemment ces fractions ou ces probabilités suivent une certaine loi : cherchons-la empiriquement à l'aide d'une construction graphique.

Si l'on choisit un système d'axes des x et des y, et que l'on porte les erreurs sur l'axe des x, on ne saurait porter les probabilités correspondantes sur l'axe des y, car la probabilité d'une erreur x déterminée, c'est-à-dire comprise entre x et $x + dx$, doit être infiniment petite; elle n'est finie que si les limites de l'erreur diffèrent elles-mêmes d'une quantité finie. On est donc conduit à chercher graphiquement une courbe $y = f(x)$ telle que les probabilités ci-dessus soient représentées par les aires comprises entre les couples d'ordonnées qui répondent aux abscisses 0^s et $0^s,1$, $0^s,1$ et $0^s,2$, ... Comme

il y a autant d'erreurs négatives que d'erreurs positives, cette courbe devra être symétrique de part et d'autre de l'axe des y; en second lieu, entre les ordonnées relatives à $x = 0$ et $x = +0^s,1$, l'aire devra être la même qu'entre les ordonnées de $x = 0$ et $x = -0^s,1$, c'est-à-dire $\frac{94}{2}$ ou 47. On obtiendra cette courbe en divisant l'axe des x en parties proportionnelles à $0^s,1$, $0^s,2$, $0^s,3$, ... et en construisant sur les intervalles de 0^s à $0^s,1$, de $0^s,1$ à $0^s,2$, ... des rectangles proportionnels aux nombres 47, 44, ..., puis en traçant un trait continu qui laisse, en dedans, de petites aires triangulaires équivalentes à celles qu'il laissera en dehors.

La courbe suivante, dont nous ne donnons que la moitié située du côté des x positifs, représentera, par ses aires, la loi de probabilité des erreurs comptées sur les abscisses.

Fig. 40.



Elle se rapproche évidemment du genre de celles qui ont pour équation $y = ae^{-h^2x^2}$, a et h étant des paramètres à déterminer. Si en effet on les détermine par deux de ces points, on verra que la courbe $y = 47,365e^{-(1,764)^2x^2}$ passe à peu près par tous les autres.

La seule différence appréciable consiste en ce que la courbe représentée par cette équation devrait atteindre l'axe des x, comme le fait la courbe que nous venons de tracer, en deux points symétriques par rapport à l'origine o, dont les abscisses $x = \pm K$ représenteraient les erreurs limites, impossibles à commettre dans ce genre d'observations. Au lieu de cela, la courbe $y = 47,365e^{-(1,764)^2x^2}$ est en réalité asymptote à l'axe des x. Mais les lignes de cet ordre s'approchent si rapidement

de l'axe des x, qu'au delà de l'abscisse $\pm$ K leur aire devient entièrement négligeable, comme on le verra plus tard.

Nous regarderons donc comme empiriquement établi avec toute l'exactitude désirable que, pour le genre d'observations ici considérées, la probabilité P qu'une erreur comprise entre les limites finies x et $x + \Delta x$, ou, en d'autres termes, le rapport

$$\frac{\text{aire de la courbe comprise entre les ordonnées correspondantes}}{\text{aire totale de la courbe}},$$

aura pour expression

$$P = \frac{\int_x^{x+\Delta x} a e^{-h^2 x^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-h^2 x^2} dx},$$

car, d'après ce qui a été dit tout à l'heure, il est permis de remplacer, sans erreur sensible,

$$\int_{-K}^{+K} a e^{-h^2 x^2} dx \text{ par } \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-h^2 x^2} dx.$$

Or on sait que l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-h^2 x^2} dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{h}.$$

Donc on a finalement

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_x^{x+\Delta x} e^{-h^2 x^2} dx,$$

et la probabilité infiniment petite de l'erreur déterminée x (c'est-à-dire comprise entre x et $x + dx$) sera

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx.$$

Telle est, d'après les excellentes observations de Bradley, la loi de probabilité des erreurs purement accidentelles, c'est-à-dire dégagées de toute erreur systématique. Et nous sommes ici en droit de considérer les choses ainsi, car, dans le système d'observation de Bradley, les erreurs systématiques dues à l'instrument étant sensiblement les mêmes pour l'étoile et pour le

Soleil, ces erreurs disparaissent de la différence conclue des Æ.

Mais il faut voir encore si, dans un genre de mesure tout différent, nous retrouverons la même loi de probabilité des erreurs accidentelles.

Le général Didion donne dans son *Traité des probabilités appliquées au tir* la série suivante d'épreuves faites avec un pistolet de cavalerie. Ce sont les écarts des balles tirées sur une cible où nous supposerons tracée une ligne verticale. Ces écarts sont donc mesurés dans le sens horizontal. L'arme employée n'ayant pas de déviation constante et les coups ayant été tirés avec le même soin, ces écarts, soit à droite, soit à gauche de la cible, doivent être considérés comme des erreurs accidentelles. En voici le Tableau :

+ 5c	+ 10c	+ 5c	− 31c	+ 8c	+ 14c	+ 8c	0c	− 23c
− 5	+ 13	+ 29	+ 25	+ 22	+ 27	+ 56	− 3	− 26
− 29	+ 22	+ 40	0	− 15	− 13	+ 8	− 31	+ 9
− 7	− 23	− 7	+ 7	− 10	+ 28	− 2	− 12	+ 19
− 4	− 1	+ 13	− 27	+ 2	+ 28	− 37	+ 7	+ 36
+ 11	+ 18	0	− 17	− 23	+ 5	− 2	− 23	− 2
+ 6	+ 3	− 4	+ 10	+ 4	+ 28	+ 2	+ 37	+ 10
− 6	+ 3	− 3	− 2	− 14	0	− 19	− 18	− 11
+ 24	− 25	− 27	− 11	− 12	+ 21	+ 9	− 1	+ 17
− 17	+ 5	− 20	− 12	+ 16	− 1	− 2	0	− 8

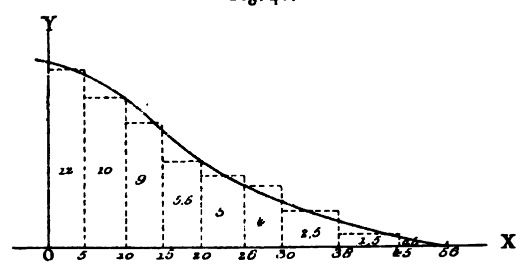
En faisant la somme des carrés des écarts, divisant par 90 − 1 et extrayant la racine carrée, on trouve l'erreur moyenne d'un coup $\varepsilon_1 = \pm 18^{cm},3$. Il y a d'ailleurs quarante-deux erreurs positives, quarante-trois négatives et cinq erreurs nulles, indifféremment positives ou négatives. Si l'on range ces écarts par ordre de grandeur, sans faire acception des signes, on trouve :

Entre	0c	et	5c....	24	écarts positifs	ou négatifs.
»	5	»	10....	20	»	»
»	10	»	15....	18	»	»
»	15	»	21....	11	»	»
»	21	»	26....	10	»	»
»	26	»	31....	8	»	»
»	31	»	38....	5	»	»
»	38	»	45	3	»	»
De 56c...........				1	»	»

En traçant une courbe dont les abscisses seront 0, 5, 10, 15, ... et telle que les aires comprises entre les ordonnées

correspondantes soient proportionnelles aux nombres 12, 10, 9, $5\frac{1}{2}$, 5, 4, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, on obtient la figure suivante :

Fig. 41.



Cette courbe est représentée de très près par l'équation

$$y = 11,31\, e^{-(0{,}0369)^2 x^2}.$$

Elle est donc de même espèce que la précédente.

On trouvera le même résultat dans tous les genres de mesures ou d'observations, pourvu qu'elles ne soient pas affectées d'erreurs systématiques. La Statistique en fournit de nombreux exemples. C'est ainsi que les anomalies accidentelles de la taille humaine suivent la même loi de probabilité ; on s'en est assuré aux États-Unis, à l'occasion de la guerre de sécession, en examinant les documents statistiques qu'on y a recueillis sur la taille des contingents militaires. En voici le Tableau :

Sur 10 000 *hommes.*

Taille.	Nombre réel.	Formule.
po		
61	105	100
62	169	171
63	369	368
64	686	675
65	1044	1051
66	1391	1399
67	1584	1584
68	1607	1531
69	1218	1260
70	852	884
71	467	531
72	277	267
73	139	118
74	92	61
....	....	....

La taille moyenne, 67po,24, semble être le type que la nature cherche à réaliser dans cette région, mais qu'elle n'atteint qu'avec des écarts attribuables à des causes multiples et purement accidentelles (B.-A. Gould).

Nous considérerons donc l'intégrale

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}dx$$

comme représentant très sensiblement la probabilité d'une erreur accidendelle comprise entre $-x$ et $+x$ dans tout système de mesure ou d'observation dont le degré de précision sera défini par le paramètre h.

Signification du paramètre h.

Nous allons voir, en effet, que tel est le sens de cette constante. La probabilité de l'erreur x étant

$$\frac{\text{nombre des erreurs égales à } x}{\text{nombre total des erreurs}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}dx,$$

multiplions les deux membres par x^2; nous aurons

$$\frac{\text{somme des carrés des erreurs égales à } x}{\text{nombre total des erreurs}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2x^2}dx.$$

En intégrant de $-\infty$ à $+\infty$, il viendra

$$\text{Moyenne des carrés de toutes les erreurs} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2x^2}dx.$$

Cette moyenne est ce que nous avons déjà désigné par ε_1^2. Quant à l'intégrale qui donne la valeur de ε_1^2 en fonction de h, nous l'obtiendrons aisément en différentiant par rapport à h une autre intégrale définie déjà employée, à savoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

On a ainsi

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} 2hx^2 e^{-h^2x^2}dx\,dh = -\frac{\sqrt{\pi}}{h^2}\,dh.$$

Par conséquent

$$2\varepsilon_1^2 = \frac{1}{h^2}, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Ainsi, ε_1 donnant une idée nette de l'exactitude d'un système de mesures, il en sera de même de son inverse h. On devra considérer ce paramètre comme une grandeur proportionnelle au degré de précision.

CHAPITRE XVIII.

ERREUR PROBABLE.

Pour tirer parti de cette théorie, il faut savoir calculer les aires de la courbe de probabilité, c'est-à-dire les valeurs de l'intégrale définie

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}\,dx.$$

Réduisons l'exponentielle en série, $\mathcal{L}$ étant un logarithme népérien :

$$(e^{-h^2})^{x^2} = 1 + (\mathcal{L}e^{-h^2})\frac{x^2}{1} + (\mathcal{L}e^{-h^2})^2\frac{x^4}{1.2} + (\mathcal{L}e^{-h^2})^3\frac{x^6}{1.2.3} + \ldots$$

En multipliant par $\frac{h}{\sqrt{\pi}}dx$ et intégrant,

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[hx - \frac{\frac{1}{3}(hx)^3}{1} + \frac{\frac{1}{5}(hx)^5}{1.2} - \frac{\frac{1}{7}(hx)^7}{1.2.3} + \ldots\right].$$

Nous sommes donc en état de calculer la probabilité qu'une erreur soit comprise entre $-x$ et $+x$, x étant une quantité donnée. Renversons le problème et demandons-nous entre quelles limites $-\eta$ et $+\eta$ une erreur doit être comprise pour que sa probabilité P soit $\frac{1}{2}$. Nous aurons à calculer η par la condition

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[h\eta - \frac{\frac{1}{3}(h\eta)^3}{1} + \ldots\right].$$

On en tire, par un tâtonnement rapide,

$$h\eta = 0,4769363,$$

et, comme

$$h\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

on a finalement

$$\eta = \varepsilon_1 \times 0,6744897.$$

Cette quantité η, telle qu'il y a à parier 1 contre 1 que l'erreur sera comprise entre $-\eta$ et $+\eta$, est ce que l'on appelle l'*erreur probable;* on vient de voir qu'elle est à très peu près les $\frac{2}{3}$ de l'erreur moyenne ε_1.

Lorsqu'en étudiant un système de mesures on trouve que l'erreur probable d'une mesure est de $0^s,1$, par exemple, cela veut dire qu'il y a autant de chances pour que l'erreur d'une mesure, prise à part, soit entre $-0,1$ et $+0,1$ qu'en dehors de ces limites. En d'autres termes, dans une série de cent erreurs effectivement constatées pour ce genre de mesures, il y en aura cinquante plus petites et cinquante plus grandes que 0,1. Si l'on se reporte aux courbes dont nous nous sommes servi plus haut, l'erreur probable η est l'abscisse dont l'ordonnée partage l'aire de la demi-courbe de probabilité en deux parties égales, tandis que l'erreur moyenne ε_1 n'est que l'abscisse du point d'inflexion. Ou bien encore, si l'on dresse la liste des erreurs d'une série par ordre de grandeurs sans avoir égard aux signes, et qu'on plie la liste en deux, l'erreur probable sera, dans ce pli, juste au milieu de la série. Or nous verrons que cette erreur probable remplace à elle seule toute la série et permet au besoin de la reconstituer, en sorte que, donner l'erreur probable d'une série de mesures, c'est donner le moyen à la fois le plus simple et le plus exact d'en apprécier la précision.

Table de probabilités.

C'est la table des valeurs de l'intégrale définie que nous venons de réduire en série. Pour calculer aisément cette série, remplaçons hx par son équivalent $h\eta\frac{x}{\eta}$ ou par $0,4769\frac{x}{\eta}$;

puis, prenant pour argument $\frac{x}{\eta}$ et lui donnant successivement pour valeurs o, o,1, o,2, o,3, ..., formons un tableau des valeurs que prend la série, c'est-à-dire P.

Par exemple, pour $\frac{x}{\eta} = 0,1$, on aurait

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}[0,04769 - \tfrac{1}{3}(0,04769)^3 + \ldots] = 0,05378,$$

et ainsi de suite.

Valeurs de $\frac{x}{\eta}$.	P.	Différence.	Valeurs de $\frac{x}{\eta}$.	P.	D
0,0......	0,000		2,5......	0,908	
0,1......	0,054	54	2,6......	0,921	13
0,2......	0,107	53	2,7......	0,931	10
0,3......	0,160	53	2,8......	0,941	10
0,4......	0,213	53	2,9......	0,950	9
0,5......	0,264	51	3,0......	0,957	7
0,6......	0,314	50	3,1......	0,963	6
0,7......	0,363	49	3,2......	0,969	6
0,8......	0,411	48	3,3......	0,974	5
0,9......	0,456	45	3,4......	0,978	4
1,0......	0,500	44	3,5......	0,982	4
1,1......	0,542	42	3,6......	0,985	3
1,2......	0,582	40	3,7......	0,987	2
1,3......	0,619	37	3,8......	0,990	3
1,4......	0,655	36	3,9......	0,991	1
1,5......	0,688	33	4,0......	0,993	2
1,6......	0,719	31	4,1......	0,994	1
1,7......	0,748	29	4,2......	0,995	1
1,8......	0,775	27	4,3......	0,996	1
1,9......	0,800	25	4,4......	0,997	1
2,0......	0,823	23	4,5......	0,998	1
2,1......	0,843	20	4,6......	0,998	0
2,2......	0,862	19	4,7......	0,998	0
2,3......	0,879	17	4,8......	0,999	1
2,4......	0,895	16	4,9......	0,999	0
2,5......	0,908	13	5,0......	0,999255	0

Supposons, par exemple, que dans la mesure des hauteurs au sextant un observateur ait pour erreur probable $\eta = \pm 20''$. La probabilité de commettre une erreur positive ou négative comprise, en valeur absolue, entre 30″ et 40″ s'obtiendra de la

manière suivante. Pour $x = 30''$, $\frac{x}{\eta} = \frac{30}{20} = 1,5$. En face du nombre 1,5, la Table donne $P = 0,688$. Concluons que sur 1000 observations il y en aura 688 pour lesquelles l'erreur sera 30″ ou au-dessous. Pour $x = 40''$ on aurait $\frac{x}{\eta} = 2$, $P = 0,823$, et par suite il y aura 823 observations sur 1000 où l'erreur sera de 40″ ou au-dessous. La différence $823 - 688 = 135$ montre que dans une série de 1000 observations il ne devra s'en trouver que 135 entre les limites assignées, ou 13,5 sur 100.

On voit aussi, par la même Table, que la probabilité de rencontrer dans une pareille série une erreur égale ou inférieure à 3 fois l'erreur probable, c'est-à-dire à 1′, sera 0,957. Il y aura donc, sur 1000 observations, 957 erreurs de cet ordre. Il n'y en aura que $1000 - 957 = 43$ supérieures à 1′. Il n'y en aura que 4 sur 100, probablement pas 1 seule sur 10.

Cependant, si sur 10 observations il se présentait une erreur égale ou un peu supérieure à 1′, il ne faudrait pas se croire autorisé à la rejeter pour cela, car la probabilité d'une telle erreur est faible $\left(\frac{43}{1000}\right)$, mais non pas évanouissante. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet.

L'application la plus remarquable qu'on puisse faire de cette Table est de calculer de très près toute la série d'erreurs qu'un observateur peut commettre dans une série de mesures dont la précision est assignée d'avance par la connaissance de l'erreur probable. Supposons, par exemple, qu'un tireur au pistolet ait pour erreur moyenne $\varepsilon_1 = 18^c,3$, ou pour erreur probable $\eta = 12^c,33$ (c'est le cas du tireur cité par le général Didion). On demande, d'après cet unique renseignement, combien de ses coups sur 100 s'écarteront de 0^c à 5^c de la cible, combien de 5 à 10, de 10 à 20, etc., et combien d'écarts atteindront 56^c. L'argument de la Table étant $\frac{x}{\eta}$, on calculera d'abord ces limites d'écarts en divisant par $\eta = 12,33$, ce qui donne :

Écarts ou valeurs de x.	Argument ou valeurs de $\frac{x}{r_1}$.
5	0,406
10	0,810
15	1,217
21	1,707
26	2,109
30	2,515
40	3,245
45	3,65
56	4,54

Avec ces valeurs de l'argument, on entre dans la Table et l'on interpole par simples parties proportionnelles pour avoir les valeurs de P. Celles-ci doivent être multipliées par le nombre de coups, qui est ici 100. On trouve ainsi :

Valeurs de x.	Valeurs de P × 100.
5	21,5
10	41,6
15	58,6
21	74,8
26	84,5
31	91,0
40	97,1
45	98,6
56 et au-dessus	99,8

Chacun des nombres de la seconde colonne exprime le nombre de coups sur 100 dont les écarts seront compris entre 0 et 5, entre 0 et 10, entre 0 et 15, etc. En retranchant chaque nombre du suivant, on a finalement :

Limites des écarts.	Nombre théorique des coups.	Nombre réel.
De 0° à 5°	21,5	24
» 5 » 10	20,1	20
» 10 » 15	17,0	18
» 15 » 21	16,2	11
» 21 » 26	9,7	10
» 26 » 31	6,5	8
» 31 » 40	6,1	5
» 40 » 45	1,5	3
» 45 » 56	1,2	1
Au-dessus de 56°	0,2	0

Ainsi, pour apprécier la précision d'une arme, il n'est pas nécessaire de recourir aux registres de tir et d'examiner la série des écarts constatés : il suffit de connaître l'erreur probable de l'arme placée dans les mains d'un tireur exercé, puisque cette erreur probable nous permet de reconstituer par le calcul, avec une exactitude bien suffisante, toute la série des écarts qui auront lieu sur un nombre donné de coups, non pas sans doute dans l'ordre où ces écarts se produiront effectivement, mais avec leur grandeur relative. En appliquant aux observations astronomiques de Bradley, déjà citées, le même procédé, on retrouverait encore plus exactement tout le Tableau des erreurs comprises entre 0^s et $0^s,1$, entre $0^s,1$ et $0^s,2$, etc.

Démonstration de la méthode des moindres carrés.

Bien que l'expression $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}dx$ ne représente pas, avec toute la rigueur mathématique du mot, la probabilité d'une erreur x dans un système de mesures de précision h, elle en est une expression assez approchée, comme on vient de le voir, pour qu'il soit permis d'en tirer quelques conséquences. Soit donc un système de m équations entre des inconnues et les mesures qui doivent servir à les déterminer. Supposons qu'un système quelconque de valeurs assignées à ces inconnues produise, dans les équations de condition, les résidus ε, ε', ε'', ... Les probabilités de ces erreurs prises chacune à part seront

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon, \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon'^2}d\varepsilon, \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon''^2}d\varepsilon, \quad \ldots,$$

et la probabilité de leur apparition simultanée sera, d'après le théorème de Moivre, le produit de leurs probabilités respectives, c'est-à-dire

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}d\varepsilon\right)^m e^{-h^2(\varepsilon^2+\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots)}.$$

Les valeurs les plus probables des inconnues sont évidem-

ment celles qui rendront cette expression maximum, c'est-à-dire qui rendront minimum la somme $\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \ldots$; en d'autres termes, ce sont celles qui donneront la moindre valeur possible à la somme des carrés des résidus. C'est justement la condition à laquelle satisfait la méthode de Legendre.

Quelques géomètres affirment que l'emploi de la méthode des moindres carrés n'est admissible qu'à la condition d'opérer sur un très grand nombre d'équations; mais, d'après les considérations que nous avons développées plus haut, il est aisé de voir que cet emploi est légitime toutes les fois que les résidus des équations suivent et reproduisent sensiblement la loi de probabilité des erreurs. On s'assure qu'il en est ainsi dans l'exemple numérique que nous avons donné plus haut, bien que le nombre des équations soit seulement de neuf.

En d'autres cas où ce nombre sera bien supérieur, l'application de la méthode des moindres carrés cessera d'être légitime, en ce sens qu'elle ne donnera pas les valeurs les plus probables des inconnues; mais on en sera averti par la marche des erreurs. Les cas d'exception ne se présentent que lorsque les observations ou les mesures employées sont entachées d'erreurs systématiques, lorsqu'on n'y a pas mis tous les soins nécessaires, ou bien encore lorsque les lois supposées ne sont pas conformes à la réalité.

Conclusion.

Le Calcul des probabilités appliqué à la théorie des mesures ou des observations a l'avantage de confirmer ce que le raisonnement nous avait appris déjà sur la meilleure manière de combiner les observations; mais il ne nous donne aucun moyen de les corriger ou de choisir entre elles les bonnes pour rejeter les mauvaises. La Table précédente nous apprend bien que la probabilité d'une erreur égale ou supérieure à 3 fois l'erreur probable η est $1 - 0,957 = 0,043$, qu'elle n'est que de $0,007$ pour une erreur égale ou supérieure à 4η, en sorte que la première ne doit se présenter que 43 fois et la seconde

7 fois sur 1000 observations, mais elle ne nous apprend pas dans quelle partie d'une série de mesures cette erreur de grandeur exceptionnelle devra se trouver.

Il arrive souvent, à la mer, que les observations de hauteur, par exemple, deviennent fort difficiles quand la mer est très agitée ou l'horizon brumeux. Alors, dans une série d'une dizaine d'observations, on en rencontre de très discordantes et l'on éprouve une forte tentation de les laisser de côté, parce qu'elles gâteraient, dit-on, la moyenne. On a proposé pour cela un criterium qui consiste à exclure, sur n observations, celles dont la probabilité, estimée par leurs écarts avec la moyenne, tomberait à $\frac{1}{n}$ et au-dessous. Par exemple, ayant réuni 20 observations d'un phénomène et obtenu, en les comparant une à une à la moyenne, une évaluation de l'erreur probable η, on rejetterait toutes celles dont la probabilité serait de $\frac{1}{20}$ seulement, ou de 0,05. La Table précédente montre que ce sont celles dont les écarts atteignent ou dépassent le triple de l'erreur probable. Alors on referait la moyenne des observations conservées en obtenant ainsi un accord plus encourageant. Mais c'est là un pur enfantillage. Si la moyenne des observations non triées est déjà assez précise pour faire apprécier l'erreur probable des observations, pourquoi y toucher ? Ensuite n'est-ce pas par une vue tout à fait arbitraire du sujet qu'on préfère la fraction $\frac{1}{n}$ à d'autres fractions, telles que $\frac{2}{n}$ ou $\frac{1}{2n}$? Une règle bien plus prudente est celle que suivent les astronomes. Elle consiste à ne jamais attendre le résultat d'un calcul pour trier leurs observations. Ils ne rejettent que celles qui sont marquées douteuses (deux points :) ou très douteuses (quatre ::) par l'observateur lui-même, au moment même de l'observation.

Si nous avons insisté si longuement sur la méthode des moindres carrés, c'est qu'il est bon de la connaître et de savoir l'appliquer au besoin. C'est un moyen puissant de discussion dont les hommes de science tirent parti lorsqu'ils veulent savoir jusqu'à quel point leurs théories, leurs formules s'a-

daptent à la réalité, ou bien lorsqu'ils veulent obtenir, avec toute la précision possible, des constantes fondamentales dans la Science. Par exemple, lorsqu'on a réuni les mesures géodésiques d'arcs de méridiens effectuées à grands frais, sur tous les continents, afin d'étudier la vraie figure du globe, c'est par la méthode des moindres carrés qu'on devra traiter les équations de condition, dût le calcul durer des mois entiers et exiger tout un personnel de calculateurs. De même, si, pour éprouver la théorie de Poisson sur la déviation des compas, on avait réuni un grand nombre de mesures, soit de déviation, soit de force magnétique, il faudrait encore avoir recours à cette méthode, bien qu'un système de nombreuses équations à six inconnues ne soit pas facile à traiter ainsi. Mais s'il ne s'agit que de déterminer ces mêmes constantes pour un voyage, constantes qui ne garderont même pas les mêmes valeurs dans la durée de ce voyage et qu'il faudra bientôt déterminer de nouveau, nous recommanderons aux marins des méthodes bien plus expéditives que la méthode de Legendre ou même celle de Cauchy. Ce sont celles dont nous avons fait usage dans ce Livre.

PARTIE PRATIQUE.

NAVIGATION PAR L'ESTIME.

CHAPITRE XIX.

LOCH ET AMPOULETTE.

Le bateau de loch est une planche de bois en forme de secteur circulaire, lestée en bas par une bordure de plomb, de manière à se tenir verticalement dans l'eau. Une corde d'en-

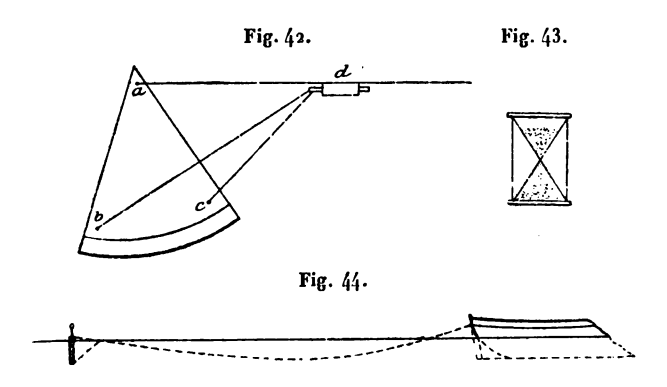


Fig. 42. Fig. 43.

Fig. 44.

viron 300^{m} est attachée en *a* à cette planche et s'enroule par l'autre bout sur un tour portatif. Quand on veut mesurer la vitesse du navire (au moins une fois par heure), on jette le loch à la mer; on attend qu'il soit assez éloigné pour être à

l'abri des remous de l'arrière; alors le timonier chargé de l'opération prend en main la corde, laquelle porte des nœuds espacés de $15^{m},43$, et compte, pendant un laps de temps de 30^{s}, les nœuds qui filent entre ses doigts. Comme 30^{s} est la cent-vingtième partie d'une heure, comme $15^{m},43$ est la cent-vingtième partie du mille marin, le nombre des nœuds donne celui des milles que le navire a parcourus en une heure.

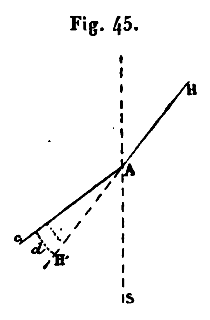
Pendant cette opération, il faut que le bateau du loch oppose la plus grande résistance possible à la traction; par conséquent la planche doit se tenir perpendiculairement à la corde. Dans ce but, on attache la ligne du loch non-seulement au sommet *a*, mais encore à deux points *b* et *c* de la base, au moyen de deux bouts de corde réunis par une cheville qui entre à frottement dur dans un petit cylindre de bois *d*. Au contraire, quand on hale à bord le bateau de loch, celui-ci doit opposer le moins possible de résistance; c'est ce qu'on obtient en imprimant à la corde du loch une forte secousse qui dégage la cheville *d* et fait tomber les deux cordelettes *bd* et *cd*. Alors le secteur est tiré par le sommet seulement et se couche sur l'eau.

Pour compter les 30^{s} réglementaires, on se sert tout simplement d'un sablier qui a cette durée. Il est évident que la plus mauvaise montre à secondes vaudrait beaucoup mieux. Il y a plus : au lieu de $15^{m},43$ pour l'espacement des nœuds, on a adopté $14^{m},8$, et l'on justifie cette pratique, qui date de loin, en disant que le timonier exerce toujours sur la corde du loch, sans le vouloir, une certaine traction qui réduit l'espace mesuré de tout le déplacement imprimé par là au bateau du loch. Une bien meilleure pratique consiste à vérifier avant le départ le procédé du loch en comparant, dans des expériences *ad hoc*, la vitesse ainsi obtenue avec la vitesse réelle, mesurée à l'aide d'une base prise à terre dont on relève, de l'intérieur du navire en marche, les extrémités. Enfin les cordes imbibées d'eau sont plus lourdes que l'eau de mer. Celle du loch, de 300^{m} de longueur, doit peser plus que son égal volume d'eau; elle *prend* donc, entre le loch et le navire, une courbure assez prononcée.

Il résulte de là que la précision ainsi obtenue n'est pas de plus de $\frac{1}{20}$. A raison de dix nœuds par heure, un navire parcourt en vingt-quatre heures 240′, ce qui donne 12′ d'erreur par jour et 1° d'erreur pour l'estime au bout de cinq à six jours de mauvais temps. Aussi a-t-on cherché à substituer au loch d'autres appareils nommés *sillomètres*. Ce sont des moulinets à ailettes de diverses formes qui sont plongés dans l'eau à l'arrière et prennent une rotation dont les tours s'enregistrent d'eux-mêmes par un système d'aiguilles et de cadrans, dans la chambre même du capitaine. On n'a qu'à déterminer par expérience la vitesse qui répond à un nombre de tours enregistrés dans un temps donné. Malheureusement ces appareils n'ont pas donné jusqu'ici de résultats satisfaisants; on a conservé, en conséquence, l'ancien procédé, qu'il serait bien facile d'améliorer.

On n'a pas remarqué que le loch ne donne pas seulement la vitesse : il indique aussi la direction de la marche du navire, direction qui ne coïncide pas toujours avec celle de l'axe de celui-ci. Lorsqu'on marche à la voile combinée ou non avec la vapeur, l'action du vent sur la voilure se décompose en deux parties, l'une, parallèle à l'axe du navire, qui produit un mouvement de progression en ce sens, l'autre, perpendiculaire à cet axe, qui déplace peu à peu le navire parallèlement à lui-même. La

Fig. 45.



route suivie est la résultante de ces deux déplacements; elle fait avec l'axe du navire un certain angle *d* et se dessine sur la mer par un large sillon que l'œil suit à une assez grande dis-

tance. La boussole ne donnant que la direction de l'axe, il faut mesurer la dérive et ajouter ce petit angle à l'azimut du navire pour avoir la route réelle. Pour cela, on fixe à l'arrière un petit cercle en cuivre avec une alidade. Le diamètre zéro coïncide avec l'axe du navire, tandis que l'alidade mobile est dirigée sur le milieu de la houache, c'est-à-dire du sillon dont nous venons de parler. Soient AS (*fig.* 45) la direction du méridien, A*c* celle de l'axe du navire, AH′ le prolongement de la houache AH, *c*AH′ sera la dérive *d*, SAH′ l'angle de route V, SA*c* l'azimut de l'axe ou A. On aura, si AH est à tribord, $V = A - d$ et à bâbord $V = A + d$.

Évidemment l'angle de route est donné immédiatement par la ligne de loch, lorsque la corde de celui-ci est fixée au navire et que le loch est à la remorque. Il suffit pour cela de faire une modification très simple à son gréement. Supposons qu'on ait noué à la corde de loch un des deux brins *b* ou *c*, et que la chevillette soit exclusivement fixée à l'autre. Lorsque, après avoir mesuré la vitesse à la manière ordinaire, on imprime une secousse à la corde pour dégager la cheville, le loch, traîné par la tranche, continuera à se tenir debout et se placera dans la direction de la moindre résistance, c'est-à-dire dans le sens de la marche. On le maintiendra ainsi à une distance de 300^{m} et l'on relèvera sa direction soit au compas, soit au sextant, ce qui vaut mieux, en rendant visible son sommet au moyen d'une tige légère portant une carte comme un jalon. Si l'on emploie le sextant, on mesurera la distance angulaire du sommet du loch à un astre connu. On obtiendra ainsi l'angle de route, dérive y comprise. Rien n'empêcherait d'opérer ainsi la nuit; on rendrait visible le haut du loch en y attachant une très petite lanterne, sauf à le mettre avec précaution à la mer au lieu de l'y jeter.

Le même procédé fournirait, à la surface de la mer, une direction connue qui remplacera assez bien la ligne d'horizon si souvent masquée par les brumes. La hauteur du signal placé au sommet du loch au-dessus de la mer étant *h*, et H celle de l'œil de l'observateur, l'inclinaison de cette ligne aura pour

tangente $\frac{H-h}{300}$; elle sera donc sensiblement de $3438' \frac{H-h}{300}$. Sans doute l'agitation de la mer fait varier à la fois H et *h*, mais en temps calme l'oscillation de la houle ne dépasse guère 1^m et ne produira qu'une variation de 11′ dans la direction de cette ligne de visée. Cet effet sera même considérablement réduit si l'on s'attache à observer la position moyenne du point de mire éloigné.

Nous verrons plus loin qu'on peut tirer un autre parti du bateau de loch en lui adjoignant une boussole qui, placée loin de l'influence du fer du navire, donnera la direction de l'aiguille aimantée et l'azimut magnétique vrai de la route suivie.

CHAPITRE XX.

BOUSSOLE.

S'il n'y a pas de fer à bord, la boussole obéit à la seule action directrice du globe. L'aiguille aimantée est placée dans une boîte cylindrique lestée, suspendue à la Cardan et fixée à l'arrière sous l'œil du timonier. Au moyen d'une chape en pierre dure, elle repose sur un pivot très aigu autour duquel elle tourne librement. Elle-même porte deux pièces : d'abord un disque mince en mica sur lequel est tracée la rose des vents ; ensuite un petit contre-poids destiné à la faire tenir horizontalement. C'est un système semblable à la boussole de l'arpenteur ; seulement c'est ici l'aiguille et non la boîte qui porte le limbe divisé, et l'alidade est remplacée par une ligne de foi tracée très visiblement sur les parois de la boîte, dans la direction de l'axe du navire. Comme cette boîte et la ligne de foi font corps avec le navire tandis que l'aiguille et son cercle divisé sont entièrement libres, si le navire vient à tourner hori-

zontalement d'un certain angle, la ligne de foi tournera de cet angle, tandis que l'aiguille et la rose des vents resteront immobiles dans la direction que leur assigne la force directrice du globe. La ligne de foi viendra se placer devant une certaine division de la rose des vents et fera connaître ainsi l'azimut du navire, compté à partir du méridien magnétique, si l'aiguille se tient réellement dans ce plan-là.

Conformément à une vieille tradition, les azimuts se comptent sur la boussole en deux sens opposés à partir de quatre divisions cardinales S, O, N, E. Les azimuts sont désignés, non par des nombres, mais par des noms propres, tels que nord-nord-est, nord-quart-nord-ouest, etc. C'est ainsi que jusqu'à la fin du siècle dernier les astronomes comptaient les longitudes écliptiques à partir de douze origines distinctes, portant chacune un nom propre et comprenant entre elles un signe ou 30°. Cet antique système était bon autrefois, lorsqu'on ne tenait compte que de quatre directions ; il s'est appliqué sans trop d'effort à huit, mais il est devenu intolérable lorsqu'on a été obligé de recourir à seize et surtout à trente-deux directions. Les trente-deux divisions actuelles de la circonférence portent le nom de *rumbs* et valent 11°15′. Le rumb à son tour se subdivise en huitièmes, valant 1°24′22″. Voici une Table de conversion; elle donne l'azimut compté du sud et exprimé en degrés qui répond à un azimut exprimé en rumbs et en huitièmes de rumb :

TABLE III.

Conversion des rumbs du compas en azimuts.

RUMBS.	AZIMUTS.	RUMBS.	AZIMUTS.	RUMBS.	AZIMUTS.	RUMBS.	AZIMUTS.
	° ′		° ′		° ′		° ′
S........	0. 0	SO	45. 0	O........	90. 0	NO......	135. 0
S $\frac{1}{8}$.......	1.24	SO $\frac{1}{8}$.....	46.24	O $\frac{1}{8}$......	91.24	NO $\frac{1}{8}$....	136.24
S $\frac{1}{4}$.......	2.49	SO $\frac{1}{4}$.....	47.49	O $\frac{1}{4}$.....	92.49	NO $\frac{1}{4}$....	137.49
S $\frac{3}{8}$.......	4.13	SO $\frac{3}{8}$.....	49.13	O $\frac{3}{8}$......	94.13	NO $\frac{3}{8}$....	139.13
S $\frac{1}{2}$.......	5.38	SO $\frac{1}{2}$.....	50.38	O $\frac{1}{2}$......	95.38	NO $\frac{1}{2}$....	140.38
S $\frac{5}{8}$.......	7. 2	SO $\frac{5}{8}$.....	52. 2	O $\frac{5}{8}$......	97. 2	NO $\frac{5}{8}$....	142. 2
S $\frac{3}{4}$.......	8.26	SO $\frac{3}{4}$.....	53.26	O $\frac{3}{4}$......	98.26	NO $\frac{3}{4}$....	143.26
S $\frac{7}{8}$.......	9.51	SO $\frac{7}{8}$.....	54.51	O $\frac{7}{8}$......	99.51	NO $\frac{7}{8}$....	144.51
SqSO....	11.15	SOqO...	56.15	OqNO...	101.15	NOqN...	146.15
SqSO $\frac{1}{8}$..	12.39	SOqO $\frac{1}{8}$..	57.39	OqNO $\frac{1}{8}$.	102.39	NOqN $\frac{1}{8}$..	147.39
SqSO $\frac{1}{4}$..	14. 4	SOqO $\frac{1}{4}$..	59. 4	OqNO $\frac{1}{4}$.	104. 4	NOqN $\frac{1}{4}$..	149. 4
SqSO $\frac{3}{8}$..	15.28	SOqO $\frac{3}{8}$..	60.28	OqNO $\frac{3}{8}$.	105.28	NOqN $\frac{3}{8}$..	150.28
SqSO $\frac{1}{2}$..	16.53	SOqO $\frac{1}{2}$..	61.53	OqNO $\frac{1}{2}$.	106.53	NOqN $\frac{1}{2}$..	151.53
SqSO $\frac{5}{8}$..	18.17	SOqO $\frac{5}{8}$..	63.17	OqNO $\frac{5}{8}$.	108.17	NOqN $\frac{5}{8}$..	153.17
SqSO $\frac{3}{4}$..	19.41	SOqO $\frac{3}{4}$..	64.41	OqNO $\frac{3}{4}$.	109.41	NOqN $\frac{3}{4}$..	154.41
SqSO $\frac{7}{8}$..	21. 6	SOqO $\frac{7}{8}$..	66. 6	OqNO $\frac{7}{8}$.	111. 6	NOqN $\frac{7}{8}$..	156. 6
SSO.....	22.30	OSO.....	67.30	ONO.....	112.30	NNO.....	157.30
SSO $\frac{1}{8}$....	23.54	OSO $\frac{1}{8}$...	68.54	ONO $\frac{1}{8}$...	113.54	NNO $\frac{1}{8}$...	158.54
SSO $\frac{1}{4}$....	25.19	OSO $\frac{1}{4}$...	70.19	ONO $\frac{1}{4}$...	115.19	NNO $\frac{1}{4}$...	160.19
SSO $\frac{3}{8}$....	26.43	OSO $\frac{3}{8}$...	71.43	ONO $\frac{3}{8}$...	116.43	NNO $\frac{3}{8}$...	161.43
SSO $\frac{1}{2}$....	28. 8	OSO $\frac{1}{2}$...	73. 8	ONO $\frac{1}{2}$...	118. 8	NNO $\frac{1}{2}$...	163. 8
SSO $\frac{5}{8}$....	29.32	OSO $\frac{5}{8}$...	74.32	ONO $\frac{5}{8}$...	119.32	NNO $\frac{5}{8}$...	164.32
SSO $\frac{3}{4}$....	30.56	OSO $\frac{3}{4}$...	75.56	ONO $\frac{3}{4}$...	120.56	NNO $\frac{3}{4}$...	165.56
SSO $\frac{7}{8}$....	32.21	OSO $\frac{7}{8}$...	77.21	ONO $\frac{7}{8}$...	122.21	NNO $\frac{7}{8}$...	167.21
SOqS...	33.45	OqSO...	78.45	NOqO...	123.45	NqNO...	168.45
SOqS $\frac{1}{8}$..	35. 9	OqSO $\frac{1}{8}$..	80. 9	NOqO $\frac{1}{8}$.	125. 9	NqNO $\frac{1}{8}$.	170. 9
SOqS $\frac{1}{4}$..	36.34	OqSO $\frac{1}{4}$..	81.34	NOqO $\frac{1}{4}$.	126.34	NqNO $\frac{1}{4}$.	171.34
SOqS $\frac{3}{8}$..	37.58	OqSO $\frac{3}{8}$..	82.58	NOqO $\frac{3}{8}$.	127.58	NqNO $\frac{3}{8}$.	172.58
SOqS $\frac{1}{2}$..	39.23	OqSO $\frac{1}{2}$..	84.23	NOqO $\frac{1}{2}$.	129.23	NqNO $\frac{1}{2}$.	174.23
SOqS $\frac{5}{8}$..	40.47	OqSO $\frac{5}{8}$..	85.47	NOqO $\frac{5}{8}$.	130.47	NqNO $\frac{5}{8}$.	175.47
SOqS $\frac{3}{4}$..	42.11	OqSO $\frac{3}{4}$..	87.11	NOqO $\frac{3}{4}$.	132.11	NqNO $\frac{3}{4}$.	177.11
SOqS $\frac{7}{8}$..	43.36	OqSO $\frac{7}{8}$..	88.36	NOqO $\frac{7}{8}$.	133.36	NqNO $\frac{7}{8}$.	178.36
SO......	45. 0	O.......	90. 0	NO......	135. 0	N........	180. 0

TABLE III.

Conversion des rumbs du compas en azimuts. (*Suite.*)

RUMBS.	AZIMUTS.	RUMBS.	AZIMUTS.	RUMBS.	AZIMUTS.	RUMBS.	AZIMUTS.
N.......	180°. 0'	NE......	225°. 0'	E........	270°. 0'	SE.......	315°. 0'
N $\frac{1}{8}$......	181.24	NE $\frac{1}{8}$.....	226.24	E $\frac{1}{8}$......	271.24	SE $\frac{1}{8}$.....	316.24
N $\frac{1}{4}$......	182.49	NE $\frac{1}{4}$.....	227.49	E $\frac{1}{4}$......	272.49	SE $\frac{1}{4}$.....	317.49
N $\frac{3}{8}$......	184.13	NE $\frac{3}{8}$.....	229.13	E $\frac{3}{8}$......	274.13	SE $\frac{3}{8}$.....	319.13
N $\frac{1}{2}$......	185.38	NE $\frac{1}{2}$.....	230.38	E $\frac{1}{2}$......	275.38	SE $\frac{1}{2}$.....	320.38
N $\frac{5}{8}$......	187. 2	NE $\frac{5}{8}$.....	232. 2	E $\frac{5}{8}$......	277. 2	SE $\frac{5}{8}$.....	322. 2
N $\frac{3}{4}$......	188.26	NE $\frac{3}{4}$.....	233.26	E $\frac{3}{4}$......	278.26	SE $\frac{3}{4}$.....	323.26
N $\frac{7}{8}$......	189.51	NE $\frac{7}{8}$.....	234.51	E $\frac{7}{8}$......	279.51	SE $\frac{7}{8}$.....	324.51
NqNE...	191.15	NEqE...	236.15	EqSE....	281.15	SEqS....	326.15
NqNE $\frac{1}{8}$..	192.39	NEqE $\frac{1}{8}$..	237.39	EqSE $\frac{1}{8}$..	282.39	SEqS $\frac{1}{8}$..	327.39
NqNE $\frac{1}{4}$..	194. 4	NEqE $\frac{1}{4}$..	239. 4	EqSE $\frac{1}{4}$..	284. 4	SEqS $\frac{1}{4}$..	329. 4
NqNE $\frac{3}{8}$..	195.28	NEqE $\frac{3}{8}$..	240.28	EqSE $\frac{3}{8}$..	285.28	SEqS $\frac{3}{8}$..	330.28
NqNE $\frac{1}{2}$..	196.53	NEqE $\frac{1}{2}$..	241.53	EqSE $\frac{1}{2}$..	286.53	SEqS $\frac{1}{2}$..	331.53
NqNE $\frac{5}{8}$..	198.17	NEqE $\frac{5}{8}$..	243.17	EqSE $\frac{5}{8}$..	288.17	SEqS $\frac{5}{8}$..	333.17
NqNE $\frac{3}{4}$..	199.41	NEqE $\frac{3}{4}$..	244.41	EqSE $\frac{3}{4}$..	289.41	SEqS $\frac{3}{4}$..	334.41
NqNE $\frac{7}{8}$..	201. 6	NEqE $\frac{7}{8}$..	246. 6	EqSE $\frac{7}{8}$..	291. 6	SEqS $\frac{7}{8}$..	336. 6
NNE.....	202.30	ENE.....	247.30	ESE.....	292.30	SSE.....	337.30
NNE $\frac{1}{8}$...	203.54	ENE $\frac{1}{8}$...	248.54	ESE $\frac{1}{8}$....	293.54	SSE $\frac{1}{8}$....	338.54
NNE $\frac{1}{4}$...	205.19	ENE $\frac{1}{4}$...	250.19	ESE $\frac{1}{4}$....	295.19	SSE $\frac{1}{4}$....	340.19
NNE $\frac{3}{8}$...	206.43	ENE $\frac{3}{8}$...	251.43	ESE $\frac{3}{8}$....	296.43	SSE $\frac{3}{8}$....	341.43
NNE $\frac{1}{2}$...	208. 8	ENE $\frac{1}{2}$...	253. 8	ESE $\frac{1}{2}$....	298. 8	SSE $\frac{1}{2}$....	343. 8
NNE $\frac{5}{8}$...	209.32	ENE $\frac{5}{8}$...	254.32	ESE $\frac{5}{8}$....	299.32	SSE $\frac{5}{8}$....	344.32
NNE $\frac{3}{4}$...	210.56	ENE $\frac{3}{4}$...	255.56	ESE $\frac{3}{4}$....	300.56	SSE $\frac{3}{4}$....	345.56
NNE $\frac{7}{8}$...	212.21	ENE $\frac{7}{8}$...	257.21	ESE $\frac{7}{8}$....	302.21	SSE $\frac{7}{8}$....	347.21
NEqN...	213.45	EqNE...	258.45	SEqE...	303.45	SqSE....	348.45
NEqN $\frac{1}{8}$..	215. 9	EqNE $\frac{1}{8}$..	260. 9	SEqE $\frac{1}{8}$..	305. 9	SqSE $\frac{1}{8}$..	350. 9
NEqN $\frac{1}{4}$..	216.34	EqNE $\frac{1}{4}$..	261.34	SEqE $\frac{1}{4}$..	306.34	SqSE $\frac{1}{4}$..	351.34
NEqN $\frac{3}{8}$..	217.58	EqNE $\frac{3}{8}$..	262.58	SEqE $\frac{3}{8}$..	307.58	SqSE $\frac{3}{8}$..	352.58
NEqN $\frac{1}{2}$..	219.23	EqNE $\frac{1}{2}$..	264.23	SEqE $\frac{1}{2}$..	309.23	SqSE $\frac{1}{2}$..	354.23
NEqN $\frac{5}{8}$..	220.47	EqNE $\frac{5}{8}$..	265.47	SEqE $\frac{5}{8}$..	310.47	SqSE $\frac{5}{8}$..	355.47
NEqN $\frac{3}{4}$..	222.11	EqNE $\frac{3}{4}$..	267.11	SEqE $\frac{3}{4}$..	312.11	SqSE $\frac{3}{4}$..	357.11
NEqN $\frac{7}{8}$..	223.36	EqNE $\frac{7}{8}$..	268.36	SEqE $\frac{7}{8}$..	313.36	SqSE $\frac{7}{8}$..	358.36
NE......	225. 0	E........	270. 0	SE.......	315. 0	S........	360. 0

Pour passer de l'azimut magnétique à l'azimut astronomique A, il faut connaître la déclinaison D de l'aiguille aimantée. Celle-ci est notée sur les Cartes marines ou donnée par des Cartes spéciales. Elle varie d'une région à l'autre; elle est tantôt orientale, quand la pointe nord de l'aiguille se tient à l'est du méridien astronomique, tantôt occidentale, suivant les climats. Lorsque cette déclinaison est notée comme orientale sur les Cartes, la pointe sud que nous considérons ici s'écarte à l'ouest; D est donc un azimut positif et doit être ajouté à tous les azimuts au compas. Alors, M étant l'azimut magnétique et A l'azimut astronomique, on aura

$$A = M + D,$$

D prenant une valeur négative quand la déclinaison est occidentale.

La dérive d est dans le sens où croissent les azimuts si la houache est relevée à bâbord. L'angle de route est donc donné par

$$V = M + D + d,$$

d prenant une valeur négative quand la dérive est à tribord.

Mais, les boussoles étant placées sous l'influence du fer du navire, l'aiguille subit une déviation δ par rapport au méridien magnétique. Il y a donc à distinguer entre l'azimut magnétique donné par la boussole ou M′ et l'azimut magnétique vrai M.

Posons $M - M' = \delta$; l'angle de route sera

$$V = M' + \delta + D + d.$$

Représentons par ε, ε', ε'', ε''' les erreurs probables de ces quatre quantités; celle de V sera

$$\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2}.$$

Il faut donc déterminer chacune de ces parties constituantes de l'angle de route avec le plus grand soin, afin de réduire au minimum l'erreur finale.

Quant aux erreurs propres de la boussole comprises sous le signe δ, elles proviennent de causes diverses, géométriques, mécaniques et physiques, que nous allons examiner.

Conditions géométriques.

1° *Ligne de foi.* — Cette ligne doit être dans le plan vertical passant par l'axe du navire. Si son plan fait un angle α avec ce dernier, les indications de l'instrument seront affectées de l'erreur constante α.

2° *Excentricité du pivot.* — Le pivot doit répondre au centre des divisions de la rose. S'il en est autrement, désignons par e son excentricité, par r le rayon de la rose, par μ la division de la rose qui répond au rayon passant par le pivot; les lectures faites à la ligne de foi seront affectées de l'erreur $\frac{e}{r}\sin(M' - \mu)$.

3° *Inclinaison de la rose.* — Si le plan de la rose fait l'angle i avec l'horizon, les angles seront affectés d'une erreur $\tang^2\frac{i}{2}\sin 2(M' - \gamma)$, γ étant la division qui répond à la trace horizontale du plan de la rose.

La réunion de ces trois erreurs donne

$$M = M' + \alpha + \frac{e}{r}\sin(M' - \mu) + \tang^2\frac{i}{2}\sin 2(M' - \gamma),$$

relation qui s'écrit aussi sous la forme

$$M = M' + \alpha + \beta\sin M' + \gamma\cos M' + \varkappa\sin 2M' + \varepsilon\cos 2M'.$$

La première erreur se corrige par un déplacement de la boîte dont la surface interne porte la ligne de foi; la deuxième en lisant la direction sur la rose à l'aide de deux lignes de foi diamétralement opposées; la troisième exigerait quatre lignes de foi équidistantes, et par conséquent quatre lectures, dont on prendrait la moyenne. Ces causes d'erreurs ne sont pas toujours négligeables. Un petit déplacement de la ligne de foi de $\frac{1}{100}$ du rayon de la boîte donnerait à la première une valeur de $3438' \times \frac{1}{100}$, ou de $34'$. Une excentricité du pivot équivalente à $\frac{1}{100}$ du rayon de la rose donnerait à $3438\frac{e}{r}$ une valeur de $34'$; une inclinaison de 10° donnerait au coefficient $3438'\tang^2\frac{i}{2}$ une

valeur de 27′. Il faut donc avant tout s'assurer que la ligne de foi coïncide bien avec l'axe du navire, que le pivot est bien au centre des divisions de la rose, et que le plan de celle-ci ne s'écarte pas trop de l'horizontalité.

Condition mécanique.

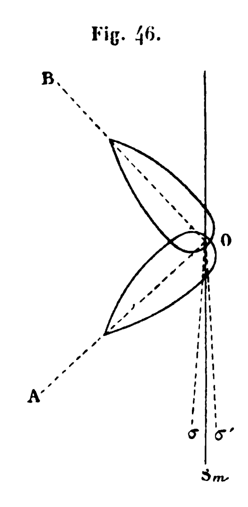
Il faudrait, pour que l'aiguille aimantée prît constamment la direction du méridien magnétique malgré les mouvements dont le navire est animé, que son centre de gravité coïncidât exactement avec le point de suspension. Cette condition n'est pas remplie en général, car, pour maintenir l'aiguille horizontale malgré l'action magnétique du globe, qui tend à faire plonger en bas l'extrémité nord sur notre hémisphère, il faut lui appliquer un petit contre-poids qu'on fait glisser de plus en plus vers l'extrémité sud à mesure qu'on se rapproche du pôle magnétique boréal. Lorsque, l'aiguille étant au repos et dirigée dans le méridien magnétique, le navire se met en marche dans un sens plus ou moins oblique au méridien, la partie sud où se trouve le petit contre-poids tend à se ranger à l'opposite de la marche, à peu près comme le ferait une girouette du navire en l'absence de tout souffle d'air, et ne revient à sa position normale que lorsque le régime de marche uniforme est établi. Il en résulte, à chaque variation de vitesse, à chaque embardée, des oscillations gênantes. En outre, si le navire change continuellement de direction, l'aiguille est déviée de sa direction première d'une manière persistante, en sorte que dans le cas d'un tour d'horizon, comme celui qu'on fait faire au navire pour la régulation des compas, il y a là une erreur systématique qui change de signe suivant le sens où le tour s'accomplit. Le remède est bien simple : pour observer l'aiguille, il faut arrêter un moment la marche circulaire du navire.

Conditions physiques.

Une boussole placée sur un navire où il y a du fer ne donne pas exactement la direction du méridien magnétique; de plus,

ses indications varient selon la place où on la met. Lorsqu'on s'en aperçut au siècle dernier, on ne manqua pas d'attribuer ces anomalies à l'influence du fer qui entre dans la construction ou dans l'armement des vaisseaux. En faisant tourner le navire sur lui-même, en mettant le cap dans les directions OA, OB,... (*fig.* 46), le fer qu'il contient prend successivement des positions différentes par rapport au méridien magné-

Fig. 46.



tique OS_m dans lequel l'aiguille devrait rester fixe. Il en résulte que l'extrémité sud de l'aiguille, au lieu de pointer vers le sud magnétique OS_m, dévie sensiblement vers l'ouest, par exemple, et prend la position $O\sigma$ quand le cap est sur OA ou à l'est en $O\sigma'$ quand le cap est sur OB, et ainsi de suite, pendant que l'axe du navire fait le tour de l'horizon. Les azimuts magnétiques fournis par la boussole ont donc pour origine, non plus le méridien magnétique OS_m, mais successivement les positions déviées $O\sigma$, $O\sigma'$, ...; de là la distinction déjà formulée entre l'azimut magnétique apparent, fourni par la boussole du bord, que nous désignerons par M′, et l'azimut magnétique vrai M. Sur la figure, σOA est l'azimut apparent M′ du navire dirigé vers OA, $S_m OA$ est son azimut vrai M, et la déviation $S_m O\sigma$ ou δ est égale à $M - M'$. De même, dans la seconde position, $S_m OA = M$,

$\sigma' OA = M'$, $\delta = - S_m O \sigma = M - M'$. La déviation est négative dans ce second cas parce qu'elle a lieu vers l'est, c'est-à-dire en sens opposé à celui où croissent les azimuts.

Dans les navires en bois, cette déviation δ est ordinairement assez faible; longtemps on l'a négligée, mais, l'emploi du fer s'étant introduit de plus en plus dans les constructions navales, la déviation a pris des proportions qui constituent un danger réel dont on ne saurait trop se préoccuper.

L'observation d'un astre connu, à une heure donnée, fournit par un calcul fort simple l'azimut A de cet astre, compté à partir du méridien du lieu. Si au même instant on relève son azimut M' à la boussole, on aura

$$A = M' + D + \delta.$$

Cette relation fait connaître la déviation pour le cap M' si D est donné; mais, δ changeant avec M', la déviation ainsi obtenue ne peut être utilisée qu'à la condition de maintenir la route : à chaque changement de direction, il faudrait de nouveau déterminer δ par une observation astronomique.

Il y a plus : on employait autrefois une boussole spéciale qu'on portait sur le pont pour opérer ces relèvements ; or, la déviation variant d'une position à l'autre, on n'obtenait ainsi celle de la boussole de route que par une comparaison avec la boussole transportable. Pour cela il fallait, après avoir observé l'astre, relever encore au même instrument la direction du cap du navire à l'aide de certains repères fixés d'avance sur le bordage. Comme ces opérations reviennent fréquemment, on a trouvé plus simple d'assigner à cette boussole auxiliaire une place fixe, celle où la déviation due au fer du navire est la plus faible, et d'en faire un compas étalon servant à contrôler le compas d'habitacle en même temps qu'à relever les gisements d'astres ou d'objets terrestres.

Nous ne nous occuperons que du compas étalon, en procédant d'abord empiriquement, comme nous l'avons fait pour les chronomètres; mais, au rebours des chronomètres dont la marche n'a pu être jusqu'ici assujettie à aucune théorie, nous

verrons que les déviations de l'aiguille à bord suivent une loi simple, due aux travaux de Poisson, loi que nous substituerons avec avantage aux formules empiriques.

CHAPITRE XXI.

ÉTUDE EMPIRIQUE DE LA DÉVIATION.

Procédés graphiques.

Tant que la disposition des masses de fer à bord reste la même, l'action qu'elles exercent sur la boussole, variable suivant les différents caps, reste aussi la même pour un cap déterminé. En d'autres termes, δ est une fonction de M ou de M'. Si donc on a observé les valeurs que prend cette fonction pour une série de valeurs bien choisies de la variable M', on sera en état d'obtenir, graphiquement ou par interpolation, comme pour les chronomètres, la déviation relative à une valeur quelconque de M'. C'est en cela que consiste la régulation des compas d'un navire. Nous supposerons d'abord que l'opération se fasse dans un port.

A l'aide de bouées ou de corps flottants sur lesquels on fixe des amarres, on fait pivoter peu à peu le navire sur place, en l'arrêtant de temps en temps pour lire sur le compas étalon, parvenu à un état complet de repos, le cap apparent M' du navire (1). En même temps on relève, avec le même compas, la différence d'azimut (A) entre le cap et un signal très éloigné. Cette

(1) Voici un autre procédé susceptible d'être employé en rade ou à la mer. en pleine marche. On traîne à la remorque un cànot où se trouvent une boussole et un timonier. Cette boussole n'étant affectée d'aucune déviation si le câble est assez long, elle donne l'azimut M de la direction actuelle du navire, tandis que le compas étalon du bord donne M'. Il suffit donc de changer successivement la direction de la marche pour obtenir la déviation M — M' pour un nombre quelconque de caps.

différence est exempte de toute erreur due au compas, celui-ci fonctionnant cette fois comme un théodolite ou une boussole d'arpenteur dans une même position du navire. Soit μ l'azimut magnétique vrai du signal, déterminé d'avance par des opérations terrestres; on aura, pour l'azimut magnétique vrai de l'axe du navire,

$$M = \mu + (A).$$

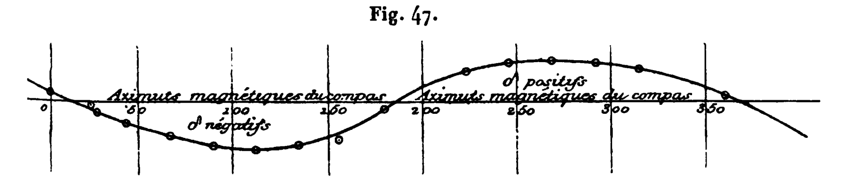
Par suite, la déviation relative au cap M′ sera

$$M' - M = \delta.$$

L'expérience nous apprend que, pour déterminer la marche de la déviation, il suffit largement d'opérer sur trente-deux directions équidistantes du navire, et par exemple d'amener successivement M′ aux valeurs 0°, 11°15′, 22°30′, 33°45′, ..., tout en déterminant, par un pareil nombre de relèvements du signal, les M correspondants. On forme ainsi une Table ayant pour argument l'azimut apparent M′, Table où l'on prend ensuite, par simples parties proportionnelles, les déviations correspondant à des valeurs quelconques de l'argument. Comme on a besoin tout autant de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire de connaître la déviation correspondant à une valeur quelconque de l'azimut magnétique vrai, il est bon de former, par une interpolation exacte entre les données précédentes, une seconde Table procédant suivant l'argument M. Des copies de cette double Table sont placées entre les mains des officiers appelés à faire le point ou à exécuter des relèvements.

Il est plus commode d'opérer graphiquement. Sur une feuille

Fig. 47.

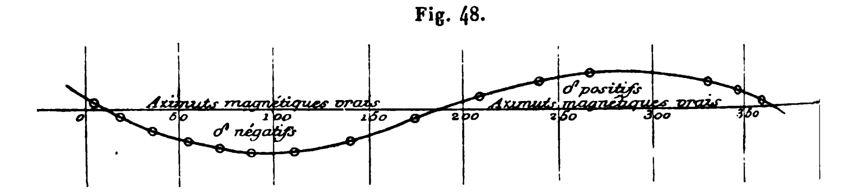


de papier millimétrique de 0^m,72 de longueur (*fig.* 47) on portera, sur une ligne horizontale, les M′ observés à raison de 2^{mm} par degré et, sur les verticales, les δ correspondants. Par les

trente-deux points ainsi obtenus on tracera une courbe au fusain, en observant bien les maxima où la courbure est forte et les points d'inflexion où elle est nulle. On rectifiera ce tracé facile à corriger, de manière à établir non pas seulement la continuité du trait, mais aussi celle de la courbure. Sans doute cette courbe ne passera pas par tous les points, à cause des erreurs d'observation, mais on s'attachera à rendre les écarts aussi petits que possible et à les distribuer tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. On complétera le tracé au crayon ordinaire, puis on le passera à l'encre avec toute la netteté et la finesse possibles.

Il convient de faire une seconde épure avec les mêmes données (*fig.* 48), en prenant cette fois $M' + \delta$, c'est-à-dire M

Fig. 48.



pour abscisse. On consultera la première pour avoir la déviation correspondante à une valeur donnée de M', la seconde pour avoir la déviation correspondant à une valeur donnée de M. Aucune méprise ne sera possible si l'on inscrit sur la première *déviations pour les caps au compas* et sur la seconde *déviations pour les caps vrais*.

Les deux épures précédentes ont été construites sur les trente-deux déviations observées en 1856 à bord du *Trident*, déviations dont on trouvera le Tableau plus loin. Elles n'ont pas besoin d'explication.

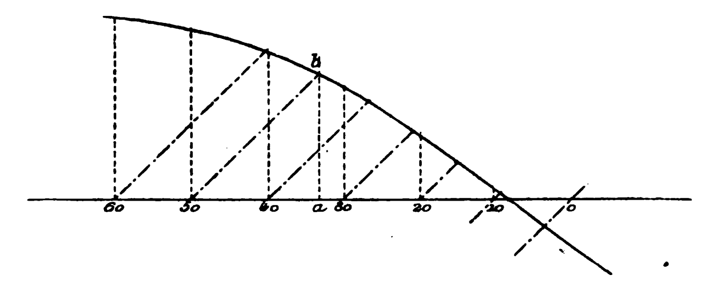
Il serait aisé de les condenser en une par l'artifice suivant, qui consiste tout bonnement à tracer sur la première feuille une deuxième suite d'ordonnées inclinées à 45° (*fig.* 49).

S'il s'agit d'avoir le cap vrai pour un cap apparent $M' = 33°10'$, on note en *a* cette division sur l'échelle horizontale; on remonte le long de l'ordonnée *ab* jusqu'à la courbe en *b*, puis de *b* on suit l'ordonnée à 45° jusqu'à la division de l'horizontale.

5o° est le cap magnétique vrai, puisqu'à M′ = 33°10′ on a ajouté la déviation *ab* = 16°5o′.

S'il s'agit d'avoir le cap apparent pour un cap vrai donné de

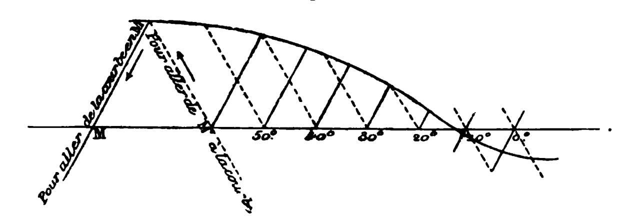
Fig. 49.



5o°, on part de la division 5o° de l'échelle horizontale, on remonte obliquement vers la courbe en *b*, puis on redescend verticalement en *a*, où l'échelle donne 33°10′; par conséquent, 33°10′ est le cap au compas.

M. Napier, de Glasgow, a trouvé qu'il y aurait avantage à partager l'inclinaison entre les deux systèmes d'ordonnées en la réduisant pour chacun à 3o° par rapport à la verticale. On construira la courbe de la *fig.* 47 en inclinant les ordonnées de 3o°, puis on mènera une deuxième série d'ordonnées faisant 6o° avec les premières.

Fig. 5o.



En voici l'usage. On donne le cap au compas 33°10′ (*fig.* 5o); pour avoir le cap vrai, il faut partir du point 33°10′, suivre l'ordonnée pointillée de ce point jusqu'à la courbe, puis redescendre le long de l'ordonnée pleine jusqu'à l'horizontale en 5o°. Le cap vrai cherché est 5o°. Pour le problème inverse, on suit la marche

inverse. L'Amirauté anglaise, trouvant ce procédé très commode, fait distribuer à tous les navires de l'État des feuilles gravées dans ce système de droites se coupant sous des angles de 60°, et formant des triangles équilatéraux sur l'axe des divisions de la circonférence. L'officier chargé des compas n'a plus qu'à y tracer la courbe des déviations. Ce système, comme le précédent, ne vaut pas celui de la double courbe en coordonnées rectangulaires où on lit à vue la déviation avec exactitude. Il paraît même qu'on oublie parfois par quel genre de lignes pleines ou ponctuées il faut commencer pour résoudre la question posée ; aussi l'auteur, M. Napier, a-t-il imaginé de mettre ses prescriptions en vers, pour les mieux graver dans la mémoire. Enfin on trouve dans le commerce des papiers millimétriques fort exacts, tandis qu'il faudrait faire exécuter tout exprès des papiers rayés fort exactement sous l'angle de 60° pour appliquer le système de M. Napier. Nous recommandons donc la double épure en coordonnées rectangulaires; elle est commode, précisé et n'expose à aucune méprise.

Formule empirique des déviations. — Série de Fourier.

Au point de vue de l'expression mathématique, les lois des phénomènes naturels se divisent en deux catégories : les unes s'expriment par des fonctions susceptibles de croître indéfiniment avec la variable, les autres par des fonctions périodiques plus ou moins complexes. Comme type des premières, rappelons la marche des chronomètres que nous avons représentée par la série de Maclaurin remplaçant la fonction inconnue de la température θ :

$$f(\theta) = f(o) + \theta f'(o) + \frac{\theta^2}{2} f''(o) + \ldots$$

A l'aspect de la forme parabolique de la courbe des marches, M. Lieussou a vu que cette série se réduit à ses trois premiers termes. Mais les phénomènes magnétiques que nous étudions ici sont périodiques, car, on a beau faire croître indéfiniment l'argument M', au bout d'une, de deux, de trois circonfé-

rences, etc., les déviations repassent chaque fois par les mêmes valeurs. Ceux-là s'expriment au moyen de fonctions périodiques dont le type est la série de Fourier :

$$f(M') = A + a \sin(M' + \alpha) + b \sin 2(M' + \beta) + c \sin 3(M' + \gamma) + \dots$$

ou

$$f(M') = A + B \sin M' + C \cos M' + D \sin 2M' + E \cos 2M' + F \sin 3M' + \dots.$$

En examinant les courbes de déviation, on est frappé de leur caractère presque purement sinusoïdal ; il y a donc tout lieu de croire que les premiers termes suffiront et que déjà les coefficients des sinus et cosinus du double de l'argument seront relativement faibles. L'étude des déviations se trouve ainsi ramenée à la détermination d'un très petit nombre de constantes de la série de Fourier au moyen de certaines valeurs de la fonction inconnue $f(M')$.

Supposons donc qu'on ait déterminé les déviations correspondant à un certain nombre de valeurs de l'azimut M'. A chacune de ces déviations répond une équation de condition entre les coefficients inconnus A, B, C, D, ... Nous traiterons l'ensemble de ces équations par la méthode déjà employée. Elle consiste à former l'équation en B, par exemple, en ajoutant toutes les équations après avoir changé les signes dans celles où le coefficient de B est négatif, l'équation en C en ajoutant de nouveau toutes les équations après avoir changé les signes de celles où le coefficient de C est négatif, etc. On obtient ainsi autant d'équations finales que d'inconnues, et l'on résout le système de ces équations finales par les méthodes ordinaires de l'Algèbre.

Ces calculs sont d'une extrême simplicité ; les équations finales sont même toutes résolues si l'on a eu la précaution de faire croître l'argument M' par intervalles réguliers partageant la circonférence en un certain nombre de parties égales. Alors, en effet, l'équation finale en A ne contient que l'inconnue A, car la somme des sinus ou des cosinus d'arcs pris sur toute une circonférence en progression arithmétique est

nulle. Il en sera de même de l'équation en B. Pour celle-là la somme des coefficients de B, rendus tous positifs, est facile à calculer, tandis que la somme des coefficients des autres inconnues, après le changement de signe indiqué plus haut, est nulle. De même pour l'équation en C, etc. Il n'est même pas nécessaire de calculer ces coefficients et de les ajouter : le théorème suivant va nous en donner la somme.

Si dans la relation connue (p. 16)

$$\cos(m-1)a - \cos(m+1)a = 2\sin a \sin ma,$$

on donne successivement à m les valeurs 1, 2, 3,..., m, et que l'on fasse la somme des équations ainsi obtenues, on aura

$$1+\cos a - \cos ma - \cos(m+1)a = 2\sin a(\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin ma).$$

La circonférence étant divisée en $2m$ parties égales que nous désignerons par a, ma sera égal à 180°; $\cos(m+1)a$ sera égal à $-\cos a$; le premier membre se réduira à $2+2\cos a$. En divisant les deux membres par $2\sin a$, la relation précédente deviendra

$$\cot\frac{a}{2} = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots + \sin ma.$$

La somme des sinus sur l'autre moitié de la circonférence sera $-\cot\frac{a}{2}$. Mais, en changeant de signe les sinus négatifs pour former le coefficient de B, la somme totale sera $2\cot\frac{a}{2}$. Il en est de même évidemment pour la somme des cosinus pris positivement, c'est-à-dire pour le coefficient de C.

Ceux des termes en $\sin 2M'$, $\cos 2M'$ s'obtiennent tout aussi aisément lorsque m est lui-même un nombre pair. Alors le quart de la circonférence est divisé en un nombre entier $\frac{m}{2}$ de parties égales à $2a$, et l'on a

$$\cot a = \sin 2a + \sin 4a + \ldots + \sin\frac{m}{2}a.$$

Les coefficients de D et de E seront donc $\cot a$.

Appliquons cette méthode si simple aux déviations du *Trident* observées aux trente-deux aires de vent ([1]); en voici le Tableau :

Calcul des déviations du Trident.

M'.	2M'.	δ.	sin M'.	cos M'.	sin 2M'.	cos 2M'.	δ calculé.	Calcul moins observat.
° ′	° ′						° ′	′
0. 0	0. 0	+ 3,10	0	+	0	+	+ 3.28	+18
11.15	22.30	+ 0,05	+	+	+	+	+ 0.31	+26
22.30	45. 0	− 3,00	+	+	+	+	− 2.34	+26
33.45	67.30	− 6,30	+	+	+	+	− 5.58	+32
45. 0	90. 0	− 9,40	+	+	+	0	− 9.29	+11
56.15	112.30	−13, 0	+	+	+	−	−13.10	−10
67.30	135. 0	−16,10	+	+	+	−	−16.59	−49
78.45	157.30	−19,15	+	+	+	−	−19.42	−27
90. 0	180. 0	−21,10	+	0	0	−	−22.14	−64
101.15	202.30	−23,20	+	−	−	−	−23.53	−23
112.30	225. 0	−24,00	+	−	−	−	−24.26	−26
123.45	247.30	−23,35	+	−	−	−	−23.44	− 9
135. 0	270. 0	−22,00	+	−	−	0	−21.45	+15
146.15	292.30	−19,00	+	−	−	+	−18.31	+29
157.30	315. 0	−14,50	+	−	−	+	−14. 8	+42
168.45	337.30	− 9,15	+	−	−	+	− 9. 4	+11
180. 0	0. 0	− 3,10	0	−	0	+	− 3.27	−17
191.15	22.30	+ 2,35	−	−	+	+	+ 2.16	−19
202.30	45. 0	+ 8,10	−	−	+	+	+ 7.40	−30
213.45	67.30	+13,10	−	−	+	+	+12.32	−38
225. 0	90. 0	+16,50	−	−	+	0	+16.28	−22
236.15	112.30	+19,30	−	−	+	−	+19.20	− 8
247.30	135. 0	+20,30	−	−	+	−	+21. 5	+35
258.45	157.30	+21,05	−	−	+	−	+21.44	+39
270. 0	180. 0	+20,20	−	0	0	−	+21. 0	+40
281.15	202.30	+19,15	−	+	−	−	+20.17	+62
292.30	225. 0	+18,05	−	+	−	−	+18.32	+27
303.45	247.30	+16,30	−	+	−	−	+16.23	− 3
315. 0	270. 0	+14,40	−	+	−	0	+13.58	−42
326.15	292.30	+12,05	−	+	−	+	+11.28	−37
337.30	315. 0	+ 9,40	−	+	−	+	+ 8.50	−50
348.45	327.30	+ 6,0	−	+	−	+	+ 6.14	+14

La première colonne contient les valeurs de l'argument M′

([1]) *Manuel de l'Amirauté*, trad. de M. Collet, p. 23.

pour lesquelles la déviation a été observée. La troisième contient les valeurs de δ. Les quatre suivantes donnent tout simplement les signes des coefficients de B, C, D, E, c'est-à-dire les signes des sinus et cosinus M′, des sinus et cosinus 2M′. On forme par simple addition et soustraction le terme tout connu de l'équation en A dont le coefficient est 32; ce terme est la somme algébrique des valeurs de δ telles quelles, c'est-à-dire avec leurs signes propres. Désignons-la par $[\delta]$. Ensuite on forme le terme tout connu de l'équation en B, c'est-à-dire la somme algébrique des δ changés de signe toutes les fois que la première colonne des signes a le signe —. Désignons cette somme par $[\delta_1]$ et formons de même les trois autres $[\delta_2]$, $[\delta_3]$, $[\delta_4]$. Les équations finales sont, sans autre calcul,

$$
\begin{array}{llll}
32\,A = [\delta] \quad \text{ou bien} & 32\quad A = -\ 6^{\circ},15', & \text{d'où}\ A = - & 0^{\circ}.12', \\
2\cot\dfrac{11^{\circ}15'}{2} = [\delta_1] & 20,306\,B = -\,443,05, & B = - & 21.49, \\
2\cot\dfrac{11^{\circ}15'}{2} = [\delta_2] & 20,306\,C = \quad 70,10, & C = & 3.27, \\
4\cot 11^{\circ}15' = [\delta_3] & 20,109\,D = \quad 74,15, & D = & 3.42, \\
4\cot 11^{\circ}15' = [\delta_4] & 20,109\,D = \quad 4,15, & E = & 0.13.
\end{array}
$$

La formule des déviations du *Trident* serait donc

$$
\begin{aligned}
\delta = -0^{\circ}12' - (21^{\circ}49')\sin M' + (3^{\circ}27')\cos M' \\
+ (3^{\circ}42')\sin 2M' + (0^{\circ}13')\cos 2M'.
\end{aligned}
$$

Une vérification est nécessaire. Les déviations pour les trente-deux caps de la première colonne ont été calculées par cette formule; elles se trouvent dans l'avant-dernière colonne. La dernière contient, sous le titre *Calcul — observation*, les écarts de la formule. Il suffit d'un coup d'œil sur ces derniers nombres pour reconnaître que :

1° Les écarts suivent une marche assez régulière, s'annulent six fois dans le cours d'une circonférence et présentent trois maxima positifs alternant avec trois maxima négatifs. Cela indique clairement qu'il aurait fallu prendre un terme de plus de la série de Fourier, à savoir $c \sin 3(M' + \gamma)$.

2° En construisant la courbe de ces écarts on y relève aisé-

ment les éléments de cette triple sinusoïde, et l'on trouve $c = 40'$, $\gamma = -2°$, en sorte que la formule complète des déviations est

$$\delta = -0°12' - (22°5')\sin(M' - 9°) + (3°42')\sin 2(M' + 1°7') + 40' \sin 3(M' - 2°).$$

3° Il ne reste plus dès lors, entre cette formule et les déviations observées, que des erreurs très petites, n'affectant plus d'allure systématique, des écarts, en un mot, que l'on peut attribuer aux erreurs accidentelles d'observation. Il paraît, d'après ces derniers résidus, que l'erreur probable d'une de ces observations faites à bord du *Trident* n'atteint pas 15', et tel serait aussi, d'après cela, le degré de précision obtenu dans ces opérations par les marins anglais.

4° La série de Fourier s'adapte bien au phénomène des déviations; les premiers termes ont seuls une valeur sensible; ceux que nous négligeons dans cette série indéfinie n'auraient que des coefficients très petits, de l'ordre même de grandeur des erreurs accidentelles d'observation.

Mais, avec des observations pareilles, il n'est nullement besoin d'exécuter trente-deux mesures; on peut se borner au nombre strictement nécessaire. Alors les calculs sont d'une extrême simplicité. Bornons-nous, par exemple, aux quatre directions cardinales; les équations seront

$$\begin{array}{llll}
\text{Pour } M' = & 0°\ldots & +\ 3°10' = A & + C + E, \\
\text{»}\quad M' = & 90\ldots & -21.10 = A + B & - E, \\
\text{»}\quad M' = & 180\ldots & -\ 3.10 = A & - C + E, \\
\text{»}\quad M' = & 270\ldots & +20.20 = A - B & - E,
\end{array}$$

d'où l'on tire immédiatement les équations finales

$$\begin{aligned}
-\ 0°50' &= 4A, \\
-41.20 &= 2B, \\
6.20 &= 2C, \\
50 &= 4E.
\end{aligned}$$

On a donc les valeurs $A = -12'$, $B = -20°40'$, $C = 3°10'$,

E = 12′. Pour déterminer D il faut une cinquième observation. Prenons la déviation relative à M′ = 225°; on formera l'équation

$$16^\circ 50' = A - 0,707(B + C) + D,$$

qui donne, avec les valeurs précédentes de A, B, C,

$$D = 4^\circ 21'.$$

Il est telle circonstance où l'on est forcé de se procurer immédiatement, à bref délai, une Table de déviations. On voit que, grâce à la série de Fourier, on obtiendra une expression passablement approchée en se bornant à cinq mesures de la déviation.

Nous avons à ce sujet deux remarques à faire. La première, c'est que la série de Fourier représente en bloc toutes les erreurs de la boussole, quelle qu'en soit la cause. Le coefficient A répond aussi bien à une erreur de tracé de la ligne de foi qu'à une particularité dans la distribution du fer doux à bord; les coefficients B et C englobent l'erreur d'excentricité, les coefficients D et E celle de l'inclinaison de la rose, etc. Nous verrons plus tard qu'il importe d'avoir les valeurs réellement relatives au fer du navire. Il faut donc, avant de mesurer les déviations, s'assurer que la boussole donne les relèvements sans erreurs géométriques. La seconde remarque s'adresse aux personnes qui jugeraient superflu d'étudier les déviations avec tant de soin, alors que dans maintes circonstances on a bien de la peine à gouverner à 2° près. L'angle de route dépend de plusieurs sortes de déterminations; si l'on traitait chacune d'elles à 2° ou 3° près, on s'exposerait à des accumulations d'erreurs allant bien plus loin, erreurs fatales au bout de quelques jours de brume ou de temps couvert.

Interprétation physique des divers termes de la série de Fourier appliquée aux déviations.

La série de Fourier représente, avons-nous dit, en bloc, les défauts d'installation de la boussole, les erreurs de division de la rose, c'est-à-dire les vices géométriques de l'instrument

et l'influence toute physique des masses de fer. C'est par des termes analogues, mais bien plus compliqués, que les astronomes représentent les perturbations périodiques des planètes ou bien les fluctuations également périodiques du niveau des mers. L'avantage de cette série, d'un usage si étendu, c'est de décomposer en quelque sorte le phénomène en parties plus simples et plus accessibles à l'étude. La période du premier terme est d'une circonférence, celle du deuxième d'une demi-circonférence, celle du troisième d'un tiers de circonférence, et ainsi de suite. Cette seule notion fait souvent reconnaître la cause spéciale qui donne naissance à un de ces termes, car la période de la cause doit être identique à celle de l'effet. Si, par exemple, dans les inégalités du mouvement de la Terre, on reconnaît l'existence d'un petit terme dont la période soit d'un mois on n'aura nul besoin de théorie pour en conclure que ce terme provient exclusivement de l'action de la Lune sur la Terre.

Ici nous distinguons trois termes principaux :

1° Le terme constant, extrêmement petit toutes les fois que la boussole est placée dans l'axe du navire, mais prenant une valeur bien plus grande quand elle est placée à tribord ou à bâbord. Comme les masses de fer à bord sont distribuées symétriquement par rapport à l'axe, c'est à un défaut plus ou moins marqué de symétrie de la boussole qu'il faut rapporter ce terme.

2° Le terme $a \sin(M' + \alpha)$, dont la période est d'une circonférence. Il s'exprime aussi par $B \sin M' + C \cos M'$ en posant $B = a \cos\alpha$, $C = a \sin\alpha$; il s'annule pour $M' = -\alpha$ ou $360° - \alpha$, et pour $M' = 180° - \alpha$, c'est-à-dire dans deux directions diamétralement opposées. C'est la partie *semi-circulaire* de la déviation. On lui a donné ce nom parce que sur une demi-circonférence, de $M' = -\alpha$ à $M' = 180 - \alpha$, la déviation est de même signe que le coefficient a, tandis que dans l'autre moitié de la circonférence elle est de signe contraire. Les Anglais ont remarqué à ce sujet une coïncidence fort curieuse. Pour les navires en fer, la direction où la déviation est nulle à bord

coïncide à très peu près avec celle de l'orientation où le navire avait été placé sur le chantier à l'époque de sa construction. Or, lorsqu'une masse de fer dur, susceptible de prendre une aimantation permanente sous l'action magnétique de la Terre aidée par les chocs répétés que ces pièces reçoivent au chantier, vient à s'aimanter, c'est dans le sens de son orientation que cette masse s'aimantera plutôt que dans tout autre, et elle gardera toujours une trace de cette aimantation, à moins que sa constitution moléculaire ne vienne à changer. On en a conclu que la déviation semi-circulaire doit provenir de la présence du fer dur ou coërcitif à bord et de sa transformation primitive en aimants permanents. Mais elle doit dépendre aussi, en partie, du fer doux, car une pièce de ce genre, placée verticalement, devient elle-même un aimant et restera telle tant qu'elle gardera sa position verticale.

3° Le terme $b \sin 2(M' + \beta)$, dont la période est d'une demi-circonférence. Il s'annule quatre fois lorsque $M' + \beta$ prend les valeurs 0°, 90°, 180° et 270°. Dans chaque quadrant, il y a un maximum positif ou négatif. On lui a donné le nom de *déviation quadrantale*. Eh bien, cette période est une indication très nette de la cause physique à laquelle ce genre de déviation est dû. Il n'y a que des pièces de fer doux qui puissent le présenter. Lorsqu'un barreau de fer doux, placé à bord horizontalement, est amené par la rotation du navire dans la direction du méridien magnétique, il devient un aimant. A 90° de là, dans la direction perpendiculaire à ce méridien, il cesse de l'être. Après un quart de tour de plus il revient au méridien, ayant simplement changé de plan bout pour bout; il redevient aimant, mais ses pôles sont renversés. Dans les positions intermédiaires, son magnétisme varie proportionnellement au cosinus de l'angle qu'il fait avec le méridien. Or, soit dans le méridien, soit dans la direction perpendiculaire, il n'agit pas sur l'aiguille, ou du moins la déviation qu'il produit est nulle : nulle quand il est à 90° du méridien, parce qu'il n'a aucune vertu magnétique, et nulle dans le méridien, parce que son action s'exerce alors dans la même direction que celle de

la Terre. L'action du fer doux étant nulle en quatre points de la circonférence, et présentant dans les quadrants opposés des maxima de signes contraires, la période est d'une demi-circonférence et répond complètement au troisième terme de la formule. Celui-ci représente donc l'action du fer doux à bord.

La séparation si nette de ces divers effets, la connaissance au moins approchée de leurs lois, ont suggéré tout d'abord l'idée qu'on détruirait la déviation semi-circulaire à bord en plaçant près de la boussole des barreaux d'acier aimantés pour contrebalancer l'action du fer dur, et qu'on ferait disparaître la déviation quadrantale en plaçant près de la boussole de petites masses de fer doux. On y est parvenu effectivement, et presque tous les navires anglais faisant de courts voyages ont adopté cette méthode de correction. Mais on s'est aperçu plus tard que ces moyens de compensation ne valent plus rien lorsque le navire s'éloigne beaucoup du port où ses compas ont été ainsi corrigés et passe sous d'autres climats où la force magnétique du globe a changé à la fois de grandeur et de direction. Cette compensation devient alors un danger sérieux, parce qu'elle a pour effet alors d'augmenter la déviation naturelle au lieu de la détruire.

Ces considérations montrent toute la difficulté d'une véritable théorie physique de ces phénomènes, mais elles prouvent mieux encore combien une telle théorie est indispensable pour éclairer et guider la pratique.

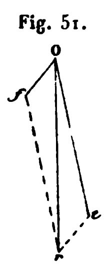
CHAPITRE XXII.

THÉORIE DE POISSON.

Représentons en grandeur et en direction par Ot la force magnétique que le globe exerce sur la pointe sud de l'aiguille, par Of celle du fer du navire, par Or la résultante, c'est-à-dire

la direction que l'aiguille prendra. Pour exprimer la relation qui existe entre ces forces, il convient de les décomposer suivant

Fig. 51.



trois directions rectangulaires OX, OY, OZ, la première étant l'axe longitudinal du navire, la deuxième son axe transverse dirigé vers tribord, la troisième une verticale dirigée de haut en bas. Si l'on désigne par X, Y, Z les trois composantes de la force terrestre Ot, par x, y, z les composantes de la force Of propre au navire, par X', Y', Z' les composantes de la force résultante Or qui détermine la direction de l'aiguille, nous aurons les trois équations d'équilibre

$$X' = X + x,$$
$$Y' = Y + y,$$
$$Z' = Z + z.$$

Les forces x, y, z représentant l'action du navire sont complexes, à cause de la double présence du fer dur, qui possède un magnétisme permanent indépendant de la direction actuelle OX du cap du navire par rapport au méridien magnétique dans lequel agit la force Ot, et du fer doux, dont l'aimantation actuelle dépend de cette direction. Désignons par P, Q, R les composantes de la force propre au fer dur, par p, q, r celles du magnétisme passager du fer doux; nous aurons

$$X' = X + p + P,$$
$$Y' = Y + q + Q,$$
$$Z' = Z + r + R.$$

Pour nous faire une idée de p, q, r, qui dépendent de la distribution du fer doux et de l'orientation actuelle du navire,

considérons que ces trois forces sont produites par l'action terrestre, qui détermine dans le fer doux, par voie d'induction, une certaine puissance magnétique. L'action terrestre étant décomposée en trois forces X, Y, Z, il suffit d'étudier à part l'action de chacune d'elles. Par X, une certaine force magnétique proportionnelle à X sera développée dans le fer doux selon une certaine direction faisant des angles α, β, γ avec les trois axes.

Les composantes suivant les trois axes seront donc

$$m\mathrm{X}\cos\alpha,\quad m\mathrm{X}\cos\beta,\quad m\mathrm{X}\cos\gamma.$$

De même, la force terrestre Y fera naître par induction, dans le fer doux, une force passagère dont les trois composantes seront

$$m\mathrm{Y}\cos\alpha',\quad m\mathrm{Y}\cos\beta',\quad m\mathrm{Y}\cos\gamma',$$

et la force Z donnera lieu aux forces induites

$$m\mathrm{Z}\cos\alpha'',\quad m\mathrm{Z}\cos\beta'',\quad m\mathrm{Z}\cos\gamma''.$$

Nous aurons donc p en faisant la somme de celles de ces neuf composantes qui sont dirigées suivant OX :

$$p = m\mathrm{X}\cos\alpha + m\mathrm{Y}\cos\alpha' + m\mathrm{Z}\cos\alpha''.$$

De même pour q et pour r. Remplaçons, pour abréger, $m\cos\alpha$, $m\cos\alpha'$, ... par de simples lettres de l'alphabet; nous aurons finalement les équations d'équilibre données par Poisson :

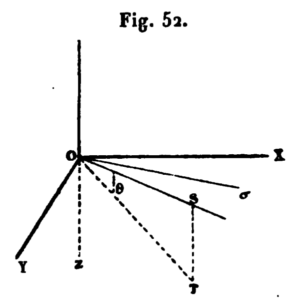
$$\begin{aligned}
\mathrm{X}' &= \mathrm{X} + a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Z} + \mathrm{P},\\
\mathrm{Y}' &= \mathrm{Y} + d\mathrm{X} + e\mathrm{Y} + f\mathrm{Z} + \mathrm{Q},\\
\mathrm{Z}' &= \mathrm{Z} + g\mathrm{X} + h\mathrm{Y} + k\mathrm{Z} + \mathrm{R},
\end{aligned}$$

$a, b, c, \ldots$ étant des constantes relatives aux trois axes invariables du navire, et dépendant uniquement de la quantité et de la situation des pièces de fer à bord.

Cela posé, désignons par φ la force terrestre OT, par θ son inclinaison au-dessous de l'horizon, et représentons-la sur la figure ci-jointe où sont tracés les trois axes du navire. Sa pro-

jection sur le plan horizontal du navire YOX sera OS, trace horizontale du méridien magnétique; $\varphi \cos\theta$ ou OS représentera l'intensité horizontale du magnétisme terrestre, et, si M est l'azimut magnétique du cap OX du navire compté dans le sens

Fig. 52.



ordinaire de SYX, l'angle SOX sera 360° — M. On aura alors, en vertu de formules déjà employées (p. 12),

$$X = \varphi \cos\theta \cos M,$$
$$Y = -\varphi \cos\theta \sin M,$$
$$Z = \varphi \sin\theta.$$

De même, en désignant par φ' la force Or (non marquée sur la *fig.* 52) résultante des actions combinées de la Terre et du navire sur la boussole, par $O\sigma$ la projection horizontale de Or et par conséquent la direction actuelle de l'aiguille horizontale, par θ' l'angle de Or avec l'horizon ou avec $O\sigma$, par M′ l'azimut apparent de l'axe du navire compté dans le sens habituel σYX, l'angle σOX sera 360° — M′ et nous aurons

$$X' = \varphi' \cos\theta' \cos M',$$
$$Y' = -\varphi' \cos\theta' \sin M',$$
$$Z' = \varphi' \sin\theta'.$$

Portons ces expressions dans les trois équations d'équilibre, divisons partout par $\varphi' \cos\theta'$ et représentons $\frac{\varphi' \cos\theta'}{\varphi \cos\theta}$ par $\frac{H'}{H}$ (1);

(1) Nous adoptons ici, en partie, la marche et les notations du *Manuel de l'Amirauté*, de MM. J. Evans et A. Smith, dont la traduction a été donnée par M. le lieutenant de vaisseau A. Collet en 1870.

il viendra

$$\frac{H'}{H}\cos M' = (1+a)\cos M - b\sin M + c\,\mathrm{tang}\,\theta + \frac{P}{H},$$

$$-\frac{H'}{H}\sin M' = d\cos M - (1+e)\sin M + f\,\mathrm{tang}\,\theta + \frac{Q}{H},$$

$$\frac{Z}{Z'} = g\cot\theta\cos M + h\cot\theta\sin M + 1 + k + \frac{R}{H}.$$

Nous n'emploierons d'abord que les deux premières équations, en posant, pour abréger,

$$1+a=\alpha,\qquad -b=\beta,\qquad c\,\mathrm{tang}\,\theta+\frac{P}{H}=\gamma,$$

$$-d=\alpha',\quad 1+e=\beta',\quad -f\,\mathrm{tang}\,\theta-\frac{Q}{H}=\gamma',$$

ce qui réduit les équations théoriques de la déviation à

$$(1)\qquad \frac{H'}{H}\cos M' = \alpha\cos M + \beta\sin M + \gamma,$$

$$(2)\qquad \frac{H'}{H}\sin M' = \alpha'\cos M + \beta'\sin M + \gamma'.$$

Elles comprennent les constantes α, β, γ, α', β', γ', la quantité H, qui est constante pour un même climat magnétique, et trois variables M, M′, H′. En éliminant H′ entre ces deux équations, la relation résultante entre M et M′ permettra de déterminer M, connaissant M′ ou inversement; c'est là l'objet du problème des déviations.

Poisson conseillait d'appliquer à la détermination de ces constantes la méthode des moindres carrés; mais il y a là une sorte de confusion. Il faut, en effet, distinguer deux choses : la vérification d'une théorie naissante, et l'application d'une théorie déjà contrôlée aux besoins de la pratique. Lorsqu'une théorie fait son apparition, il faut examiner jusqu'à quel point elle s'adapte aux faits, quel est le degré de confiance qu'elle mérite. Alors on réunit le plus grand nombre possible d'observations exactes ; à l'aide de la formule théorique on forme tout autant d'équations de condition, et l'on s'efforce d'en déduire les valeurs les plus probables des inconnues par une application

minutieuse de la méthode des moindres carrés. On ne se borne pas là ; il faut encore comparer les résultats obtenus aux observations en les introduisant dans les équations de condition. De là des résidus, des écarts entre le calcul et l'observation qui tiennent aux erreurs inévitables, accidentelles de celle-ci, mais qui peuvent aussi provenir de la théorie. C'est alors qu'on juge cette dernière. Si les écarts ont une allure systématique, on en conclut que la théorie est, ou inexacte, ou incomplète. Si ces résidus sont de nature accidentelle et de l'ordre des erreurs admissibles, ils sont imputables à l'observation ; la théorie se trouve vérifiée, et l'on est en état, à l'aide des prescriptions exposées à propos de la méthode des moindres carrés, d'apprécier avec une grande probabilité le degré de précision des résultats.

Mais, une fois ce travail de vérification achevé sur un certain nombre de cas, la théorie étant acceptée, il serait bien superflu dans la pratique de recourir à ces procédés longs et minutieux. On n'emploie plus, pour déterminer en chaque cas les inconnues du problème, que le nombre d'observations réellement nécessaires et les méthodes les plus expéditives.

Nous avons ici à distinguer deux cas : on a, ou on n'a pas de mesures de H′.

Détermination des constantes par des observations de déviation et de force horizontale.

Dans ce cas les équations (1) et (2) doivent être traitées séparément. Comme γ et γ' n'ont que l'unité pour coefficients, les équations de condition se ramènent presque immédiatement à deux inconnues, ce qui réduit beaucoup les calculs.

Pour obtenir $\frac{H'}{H}$ sous un cap apparent M′ donné, on fait osciller, à la place même de la boussole étalon, une aiguille horizontalement suspendue à un fil de soie sans torsion, et l'on observe la durée d'un grand nombre d'oscillations, d'où l'on conclut celle d'une oscillation unique. Si l'on répète à terre,

loin de toute action étrangère, la même expérience, et qu'on en ait conclu la durée T d'une oscillation dans ces circonstances, on aura $\frac{H'}{H} = \frac{T^2}{T'^2}$ pour le cap apparent M'.

M. Airy a fait les observations suivantes sur l'*Ironsides :*

M'.	M.	$\frac{H'}{H}$.
15°.50'	4°.55'	1,378
79.15	99.35	1,250
161.30	189.50	0,551
304. 0	269. 0	0,729
47.10	53.30	1,427
99. 0	124.20	1,068
234.20	227.40	0,413
356.30	331. 0	1,176

Prenons les quatre premières seulement. Pour déterminer α, β, γ, nous aurons les équations

$$\begin{aligned} 1,326 &= 0,996\alpha + 0,086\beta + \gamma, \\ 0,233 &= -0,167\alpha + 0,986\beta + \gamma, \\ -0,523 &= -0,985\alpha - 0,171\beta + \gamma, \\ 0,408 &= -0,018\alpha - 1,000\beta + \gamma. \end{aligned}$$

En prenant la moyenne de ces équations, il vient

$$0,361 = -0,043\alpha - 0,025\beta + \gamma.$$

Si on la retranche des précédentes, γ disparaît et l'on a

$$\begin{aligned} 0,965 &= 1,039\alpha + 0,111\beta, \\ -0,128 &= -0,124\alpha + 1,011\beta, \\ -0,884 &= -0,942\alpha - 0,146\beta, \\ 0,047 &= 0,025\alpha - 0,975\beta. \end{aligned}$$

La somme de la première et de la troisième changée de signe donne l'équation, pour α,

$$1,849 = 1,981\alpha + 0,257\beta.$$

La somme de la deuxième et de la quatrième changée de signe

donne l'équation, pour β,

$$-0{,}175 = -0{,}149\alpha + 1{,}986\beta;$$

d'où

$$\alpha = 0{,}935, \quad \beta = -0{,}018,$$

et, en remontant à l'équation en γ,

$$\gamma = 0{,}401.$$

Ces valeurs satisfont de très près aux quatre équations employées et représentent à $\pm 0{,}025$ près les $\frac{H'}{H}\cos M'$ déduits des quatre dernières observations, que nous laissons de côté.

Pour déterminer α', β', γ', nous emploierons, comme tout à l'heure, les quatre premières. Il suffira de mettre des accents aux inconnues dans les seconds membres de nos équations et de remplacer les premiers membres par

$$\begin{array}{r} 0{,}376, \\ 1{,}228, \\ 0{,}523, \\ -0{,}590. \end{array}$$

Les équations finales seront (inutile de recalculer les seconds membres)

$$\begin{aligned} 0{,}384 &= -0{,}043\alpha' - 0{,}025\beta' + \gamma', \\ -0{,}147 &= 1{,}981\alpha' + 0{,}257\beta', \\ 1{,}818 &= -0{,}149\alpha' + 1{,}986\beta', \end{aligned}$$

d'où les valeurs

$$\begin{aligned} \alpha' &= -0{,}195, \\ \beta' &= 0{,}930, \\ \gamma' &= 0{,}400. \end{aligned}$$

Le but est de déterminer M en fonction de M' ou réciproquement. En éliminant la variable $\frac{H'}{H}$ entre les équations (1) et (2), il vient

$$\operatorname{tang} M' = \frac{\alpha' \cos M + \beta' \sin M + \gamma'}{\alpha \cos M + \beta \sin M + \gamma};$$

par suite, dans le cas actuel,

$$\tang M' = \frac{-0,195 \cos M + 0,930 \sin M + 0,400}{0,935 \cos M - 0,018 \sin M + 0,401},$$

formule par laquelle on calculera M′ pour une série de valeurs de M ([1]).

Détermination des constantes par des mesures de déviation seulement.

Mais la théorie de Poisson n'exige nullement ces mesures d'intensité, toujours délicates et moins exactes, à bord du moins, que les mesures de déviation. La formule de tang M′ ne les contient pas. En divisant les deux termes de la fraction du second membre par α, on a

$$\tang M' = \frac{\frac{\alpha'}{\alpha}\cos M + \frac{\beta'}{\alpha}\sin M + \frac{\gamma'}{\alpha}}{\cos M + \frac{\beta}{\alpha}\sin M + \frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Il n'y a donc que cinq coefficients; on les déterminerait par cinq mesures de déviation. Prenons comme exemple le cas du *Trident* déjà traité à propos de la formule empirique, mais, eu égard aux erreurs d'observation, employons les huit déviations mesurées aux caps cardinaux M′ = 0°, 90°, 180°, 270° et aux caps quadrantaux M′ = 45°, 135°, 225°, 315°. De là les équations de condition suivantes à cinq inconnues :

Valeurs de M.

3°.10′.... $0,9985\frac{\alpha'}{\alpha} + 0,0552\frac{\beta'}{\alpha} + \frac{\gamma'}{\alpha} = 0,$

176.50.... $-0,9985\frac{\alpha'}{\alpha} + 0,0552\frac{\beta'}{\alpha} + \frac{\gamma'}{\alpha} = 0,$

68.50.... $0 = 0,3611 + 0,9325\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha},$

290.20.... $0 = 0,3475 - 0,9377\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha},$

([1]) On obtiendrait une expression un peu plus exacte en employant, dans ces calculs, l'ensemble de toutes les mesures rapportées ci-dessus.

Valeurs de M.

35°.20'....	$0{,}8158\frac{\alpha'}{\alpha}+0{,}5783\frac{\beta'}{\alpha}+\frac{\gamma'}{\alpha}=$	$0{,}8158+0{,}5783\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha},$
113. 0....	$0{,}3907\frac{\alpha'}{\alpha}-0{,}9205\frac{\beta'}{\alpha}-\frac{\gamma'}{\alpha}=$	$-0{,}3907+0{,}9205\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha},$
241.50....	$-0{,}4720\frac{\alpha'}{\alpha}-0{,}8816\frac{\beta'}{\alpha}+\frac{\gamma'}{\alpha}=$	$-0{,}4720-0{,}8816\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}.$
329.40....	$-0{,}8631\frac{\alpha'}{\alpha}+0{,}5050\frac{\beta'}{\alpha}-\frac{\gamma'}{\alpha}=$	$0{,}8631-0{,}5050\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}.$

Les deux premières donnent

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=0,\quad \frac{\gamma'}{\alpha}=-0{,}0552\frac{\beta'}{\alpha}.$$

Les deux suivantes donnent

$$\frac{\beta}{\alpha}=-0{,}0073,\quad \frac{\gamma}{\alpha}=-0{,}3543.$$

L'équation en $\frac{\beta'}{\alpha}$ s'obtiendra en faisant la somme des quatre dernières après avoir changé les signes de celles où le coefficient de $\frac{\beta'}{\alpha}$ est négatif :

$$0{,}0343\frac{\alpha'}{\alpha}+2{,}8854\frac{\beta'}{\alpha}=2{,}5416+0{,}0344\frac{\beta}{\alpha},$$

d'où

$$\frac{\beta'}{\alpha}=0{,}8808.$$

Dès lors les équations finales en $\frac{\alpha'}{\alpha}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$ sont

$$4{,}54\frac{\alpha'}{\alpha}+0{,}0344\frac{\beta'}{\alpha}=0{,}0340+2{,}89\frac{\beta}{\alpha},$$
$$2{,}54\frac{\alpha'}{\alpha}+0{,}0344\frac{\beta'}{\alpha}=0{,}0476+4{,}76\frac{\beta}{\alpha},$$

et l'on trouve

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=-0{,}0022,\quad \frac{\beta}{\alpha}=-0{,}0048.$$

Quant à $\frac{\gamma'}{\alpha}$, les deux premières donnent, avec la valeur pré-

cédente de $\frac{\beta'}{\alpha}$,

$$\frac{\gamma'}{\alpha} = -0,0486;$$

les quatre dernières donnent

$$0,8162\frac{\alpha'}{\alpha} + 0,1122\frac{\beta'}{\alpha} + 4\frac{\gamma'}{\alpha} = -0,1286 - 0,7188\frac{\beta}{\alpha},$$

et par suite

$$\frac{\gamma'}{\alpha} = -0,0555.$$

Nous adopterons la moyenne $\frac{\gamma'}{\alpha} = -0,0520$.

De même, pour $\frac{\gamma}{\alpha}$, les six dernières équations donnent

$$-0,1286\frac{\alpha'}{\alpha} - 0,7188\frac{\beta'}{\alpha} = 1,5248 + 0,1070\frac{\beta}{\alpha} + 6\frac{\gamma}{\alpha};$$

d'où

$$\frac{\gamma}{\alpha} = -0,3583.$$

La formule de Poisson devient donc

$$\operatorname{tang} M' = \frac{-0,0022\cos M + 0,8808\sin M - 0,0520}{\cos M - 0,0048\sin M - 0,3583},$$

et ce qui prouve que cette formule exprime la réalité du phénomène, c'est qu'avec ces cinq constantes on représente du premier coup les autres observations avec le degré d'exactitude qu'elles comportent.

On a ainsi les rapports de cinq des six constantes de la formule à l'une d'elles, que nous avons choisie parce qu'elle diffère peu de l'unité. Il est bien clair que, pour déterminer α lui-même, il faudrait exécuter une mesure de H', par la méthode des oscillations, à la place même du compas étalon.

Les calculs deviendraient assez longs si l'on voulait y employer les trente-deux déviations que nous avons rapportées pour le *Trident*. On les simplifiera beaucoup en observant la déviation pour des caps vrais équidistants et non pour ceux de l'aiguille. Alors on déduira immédiatement des trente-deux

équations de condition, par de simples additions, les valeurs de $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\alpha}$, $\frac{\gamma'}{\alpha}$ en fonction de $\frac{\beta}{\alpha}$ et de $\frac{\gamma}{\alpha}$; puis, en les portant dans les équations les plus favorables à ces deux dernières, on n'aura à résoudre qu'un système d'équations à deux inconnues.

Il est aisé de transformer la formule précédente de manière à lui faire donner la déviation en fonction de l'argument M'. En effet, pour éliminer $\frac{H'}{H}$ entre les relations fondamentales (1) et (2), au lieu de les diviser membre à membre, on n'a qu'à multiplier la première par $\sin M'$, la deuxième par $\cos M'$, et à égaler les seconds membres; on a ainsi

$$\begin{aligned}\alpha \cos M \sin M' + \beta \sin M \sin M' + \gamma \sin M' \\ = \alpha' \cos M \cos M' + \beta' \sin M \cos M' + \gamma' \cos M'.\end{aligned}$$

Or $M = M' + \delta$; en multipliant l'équation précédente par 2 et en remplaçant les doubles produits

$$2 \cos M \sin M', \quad 2 \sin M \sin M', \quad \ldots$$

par les sommes équivalentes de sinus ou de cosinus des angles $M + M'$ ou $2M' + \delta$ et $M - M'$ ou δ, on aura

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\sin\delta = \frac{\beta - \alpha'}{\alpha + \beta'}\cos\delta + \frac{\alpha - \beta'}{\alpha + \beta'}\sin(2M' + \delta) - \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta'}\cos(2M' + \delta) \\ + \frac{2\gamma}{\alpha + \beta'}\sin M' - \frac{2\gamma'}{\alpha + \beta'}\cos M',\end{aligned}\right.$$

que nous écrirons

$$\sin\delta = \mathfrak{A}\cos\delta + \mathfrak{B}\sin M' + \mathfrak{C}\cos M' + \mathfrak{D}\sin(2M' + \delta) + \mathfrak{E}\cos(2M' + \delta).$$

Le dénominateur commun $\alpha + \beta'$ est désigné par λ dans le *Manuel de l'Amirauté;* il ne peut être déterminé que par des mesures d'intensité horizontale. Mais il est aisé d'obtenir la valeur des cinq coefficients de cette expression rigoureusement équivalente à la formule précédente en tang M'.

Voici le Tableau des huit équations pour le cas traité précédemment.

M′.	2M′+δ.	sin δ.					
0°	0°+3°.10′	+0,0552 =	1,00 $\mathfrak{A}$	+ 0 $\mathfrak{B}$	+ 1,0000 $\mathfrak{C}$	+ 0,0552 $\mathfrak{D}$	+ 1,00 $\mathfrak{E}$
45	90 − 9.40	−0,1679 =	0,99	+0,7071	+0,7071	+0,9858	+0,17
90	180 − 21.10	−0,3611 =	0,93	+1,0000	0	+0,3611	−0,93
135	270 − 22. 0	−0,3746 =	0,93	+0,7071	−0,7071	−0,9272	−0,37
180	0 − 3.10	−0,0552 =	1,00	0	−1,0000	−0,0552	+1,00
225	90 + 16.50	+0,2896 =	0,96	−0,7071	−0,7071	+0,9571	−0,29
270	180 + 20.20	+0,3475 =	0,94	−1,0000	0	−0,3475	−0,94
315	270 + 14.40	+0,2532 =	0,97	−0,7071	+0,7071	−0,9674	+0,25

L'équation en $\mathfrak{A}$ donne

$$-0,0017 = \mathfrak{A} + 0,0080\,\mathfrak{D} - 0,01\,\mathfrak{E}.$$

$\mathfrak{A}$ est si petit et ses coefficients diffèrent si peu de l'unité, que l'on peut éliminer cette inconnue en retranchant la relation précédente de toutes les équations. On obtient ensuite les quatre équations finales

$$-1,7939 = 4,8284\,\mathfrak{B} \ldots\ldots + 0,7775\,\mathfrak{D} - 0,15\,\mathfrak{E},$$
$$+0,2807 = \ldots\ldots\ldots 4,8284\,\mathfrak{C} + 0,0989\,\mathfrak{D} + 1,08\,\mathfrak{E},$$
$$+0,2431 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3,8375\,\mathfrak{D},$$
$$+0,0136 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 0,0136\,\mathfrak{D} + 3,87\,\mathfrak{E},$$

qui donnent

$$\mathfrak{D} = +0,0633, \quad \mathfrak{E} = +0,0037,$$
$$\mathfrak{B} = -0,3816, \quad \mathfrak{C} = +0,0560.$$

On a enfin, avec les valeurs de $\mathfrak{D}$ et de $\mathfrak{E}$,

$$\mathfrak{A} = -0,0022.$$

Comparons ces résultats avec les observations. Pour cela il suffit de porter ces valeurs dans les seconds membres et d'en déduire sin δ. On a ainsi :

sin δ calculé.	δ conclu.	δ observé.	Calcul moins observation.
+ 0,0610	+ 3°.30′	+ 3°.10′	+ 20′
− 0,1683	− 9.41	− 9.40	− 1
− 0,3641	− 21.21	− 21.10	− 11
− 0,3714	− 21.48	− 22. 0	+ 12
− 0,0580	− 3.19	− 3.10	− 9
+ 0,2877	+ 16.43	+ 16.50	− 7
+ 0,3542	+ 20.45	+ 20.20	+ 25
+ 0,2470	+ 14.18	+ 14.40	− 22

Si l'on se reporte aux remarques faites plus haut sur le degré de précision des mesures exécutées à bord du *Trident,* on accordera que la théorie de Poisson représente ces mesures avec toute l'exactitude qu'elles comportent.

CHAPITRE XXIII.

ROLE DES CONSTANTES EN MER.

Signification physique des constantes.

Les constantes α, β, α', β' dépendent exclusivement du fer doux. Les termes γ et γ', ou bien

$$c\,\text{tang}\,\theta + \frac{P}{H} \quad \text{et} \quad -f\,\text{tang}\,\theta - \frac{Q}{H},$$

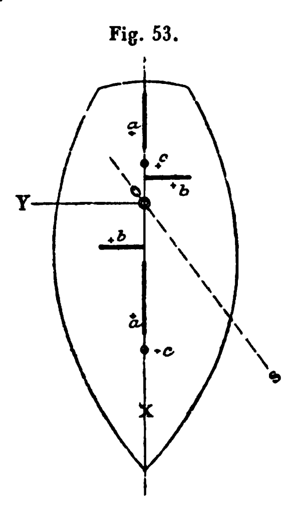
dépendent à la fois du fer doux par les constantes c et f, et du fer dur à magnétisme propre et permanent par les constantes P et Q.

P et Q peuvent être représentés par deux aimants, l'un attirant la pointe sud de l'aiguille vers l'avant dans la direction OX, l'autre vers tribord dans la direction OY.

De même les constantes α, β, ..., ou mieux a, b, c, d, e, f, qu'elles remplacent dans les formules usuelles, peuvent être représentées par des barreaux de fer doux parallèles aux axes OX, OY, OZ. Prenons, par exemple, dans la figure ci-jointe, les barreaux a placés à l'avant et à l'arrière dans le sens de OX. Les composantes Y et Z de la force magnétique du globe resteront sans action sur eux, mais la composante X les transformera par induction en de véritables aimants (non permanents, en ce sens que, si X devient nul, les barreaux deviendront eux-mêmes inactifs) dont le pôle sud sera à l'extrémité

sud de ces barreaux. Il est aisé de voir que l'un de ces barreaux, celui de l'avant, attirera la pointe sud de l'aiguille vers l'avant, et que l'autre, celui de l'arrière, la repoussera également vers l'avant, produisant ainsi une déviation positive. Cette

Fig. 53.



action sera proportionnelle à la force qui produit l'induction, c'est-à-dire à X, et pourra être représentée par aX.

De même, l'un quelconque des barreaux b recevra de la composante Y de l'action terrestre un magnétisme non permanent qui attirera (ou repoussera) la pointe sud de l'aiguille dans la direction OX. Il en sera encore de même des barreaux verticaux c, qui s'aimantent sous l'influence de la composante Z. Leur action sera dirigée vers OX si celui de l'avant est au-dessus du plan horizontal XOY et celui de l'arrière au-dessous (ce serait vers — OX si la disposition était inverse).

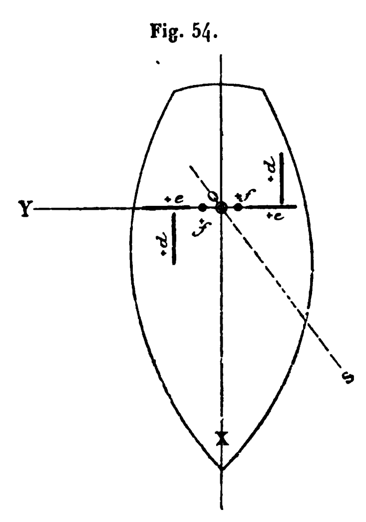
L'action totale de ces trois barreaux ou couples de barreaux dans le sens OX sera donc

$$p = a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Z}.$$

Une seconde figure nous donnera la disposition de trois autres couples de barreaux dont l'action s'exercera dans le sens OY (vers tribord). On y remarquera qu'une barre verticale placée

en f sur OY ou son prolongement attire la pointe sud vers OY si, étant à tribord, elle se trouve au-dessous du plan horizontal, ou si, étant à bâbord, elle s'élève au-dessus de ce plan. L'action

Fig. 54.



totale dans le sens OY sera donc, pour les barreaux d, e, f respectivement parallèles aux trois axes,

$$q = dX + eY + fZ.$$

Il est à remarquer que les couples de barreaux désignés sur ces figures par a, c, e sont dans le plan médian du navire ou symétriquement disposés par rapport à ce plan, tandis que les couples b, d, f sont dissymétriques. En général, le fer qui entre dans la construction et l'armement est symétrique par rapport au plan médian. Si l'on a la précaution d'éviter pour les pièces mobiles tout défaut de symétrie, et de placer le compas étalon sur l'axe OX, b, d, f seront nuls ou très faibles, et il en sera de même de β, α' et d'une partie de γ'. S'il n'y avait que de l'acier ou du fer très coercitif à bord, ayant acquis un magnétisme déterminé sur le chantier de construction, a, b, c, d, e, f seraient nuls, ainsi que β et α' ; α, qui représente $1 + a$, et $\beta' = 1 + e$ se réduiraient à 1, γ à $\frac{P}{H}$ et γ' à $-\frac{Q}{H}$. La formule (3

deviendrait

$$\operatorname{tang} M' = \frac{\sin M + \frac{P}{H}}{\cos M - \frac{Q}{H}},$$

d'où l'on tirerait

$$\sin(M - M') = \sin\delta = -\frac{P}{H}\sin M' - \frac{Q}{H}\cos M'.$$

Ce serait une déviation semi-circulaire.

Un des avantages de cette théorie, c'est de distinguer nettement entre la partie de la déviation qui reste la même sous tous les climats magnétiques et celle qui varie avec le climat dans un voyage de long cours. La partie variable se réduit évidemment à γ et γ', où interviennent les éléments géographiquement variables θ et H. Les coefficients qui ne changent pas, qui peuvent être déterminés une fois pour toutes, sont α, β, α', β' ou, lorsqu'on a divisé par α, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\alpha}$. Il résulte de là que, si l'on voit changer en voyage l'inclinaison θ et la force terrestre horizontale H, et qu'on soit obligé de construire une nouvelle Table de déviations, on gardera les valeurs obtenues pour $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\alpha}$, et l'on n'aura plus à déterminer que $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\gamma'}{\alpha}$. Pour cela deux observations de déviation suffisent, et l'opération n'est pas impraticable en mer.

Il y a plus : si l'on était proche de l'atterrissage et à court de temps, le travail nécessaire pour recalculer les déviations avec les nouvelles valeurs de $\frac{\gamma}{\alpha}$ et de $\frac{\gamma'}{\alpha}$ serait considérablement réduit, pourvu qu'on eût conservé les calculs exécutés avant le départ. Ces calculs donnent, en effet, dans la fraction

$$\frac{\frac{\alpha'}{\alpha}\cos M + \frac{\beta'}{\alpha}\sin M + \frac{\gamma'}{\alpha}}{\cos M + \frac{\beta}{\alpha}\sin M + \frac{\gamma}{\alpha}},$$

la partie $\frac{\alpha'}{\alpha}\cos M + \frac{\beta'}{\alpha}\sin M$ et la partie $\cos M + \frac{\beta}{\alpha}\sin M$, aux-

quelles il suffira d'ajouter les nouvelles valeurs de $\frac{\gamma}{\alpha}$ et de $\frac{\gamma'}{\alpha}$.

Supposons de plus que ces nouvelles valeurs, que nous désignerons par $\frac{\gamma_1}{\alpha}$ et $\frac{\gamma'_1}{\alpha}$, soient dignes de confiance. Nous aurons les deux équations

$$\frac{\gamma}{\alpha} = c \operatorname{tang} \theta + \frac{P}{H},$$

$$\frac{\gamma_1}{\alpha} = c \operatorname{tang} \theta_1 + \frac{P}{H_1}.$$

Les Cartes magnétiques donnant pour la seconde station du navire θ_1 et H_1, on sera en état de déduire de ces relations les constantes c et P; $\frac{\gamma'}{\alpha}$ et $\frac{\gamma'_1}{\alpha}$ donneront pareillement f et Q. On sera donc désormais en état de calculer les déviations pour un climat quelconque.

Déviation due à la bande.

Cette théorie a été donnée par M. A. Smith dans le *Manuel de l'Amirauté*. Elle résulte immédiatement de l'application des formules de transformation des coordonnées à celles de Poisson. Lorsque le navire s'incline d'un angle i sous l'action du vent et conserve cette inclinaison, le système des axes de coordonnées dont nous avons fait usage tourne du même angle i autour de OX; OY et OZ deviennent OY_1 et OZ_1. Désignons les nouvelles composantes des forces selon OY_1 et OZ_1 par Y_1 et Z_1; nous aurons encore

$$X' = X + aX + bY_1 + cZ_1 + P,$$

$$Y'_1 = Y_1 + dX + eY_1 + fZ_1 + Q_1,$$

$$Z'_1 = Z_1 + gX + hY_1 + kZ_1 + R_1.$$

Les composantes Y_1 et Z_1 seront données par

$$Y_1 = \quad Y \cos i + Z \sin i,$$

$$Z_1 = - Y \sin i + Z \cos i.$$

De même les composantes Y' et Z' seront reliées à Y'_1 et Z'_1 par

$$Y' = Y'_1 \cos i - Z'_1 \sin i,$$
$$Z' = Z'_1 \cos i + Y'_1 \sin i.$$

L'angle i étant généralement petit, d'une dizaine de degrés par exemple, nous remplacerons $\cos i$ par 1 et $\sin i$ par i. En éliminant Y_1, Z_1, Y'_1, Z'_1 entre les relations précédentes, on aura

$$X' = X(1+a) + (b-ci)Y + (c-bi)Z + P,$$
$$Y' = X(d-gi) + (1+e-fi-hi)Y + (f+ei-ki)Z + Q - Ri,$$
$$Z' = X(g+di) + (h+ei-ki)Y + (1+k+fi+hi)Z + R + Qi.$$

Ainsi les formules primitives conservent leur forme, seulement b est remplacé par $b - ci$, c par $c - bi$, etc.

Pour obtenir les nouveaux coefficients de la formule (3), il faudrait avoir déterminé dans la position droite, outre les coefficients a, b, c, d, e, f, les trois coefficients g, h, k et les composantes P, Q, R. C'est ce qui est possible à la rigueur en utilisant la dernière des équations d'équilibre au moyen d'observations de la force verticale Z' (à l'aide des oscillations d'une aiguille d'inclinaison); mais ces complications n'ont guère pénétré jusqu'ici dans la pratique. Le plus simple serait de déterminer de nouveau les coefficients de la formule (3) après avoir donné une certaine inclinaison i au navire et de recommencer le même travail sous une inclinaison $-i$; mais on se contente d'ordinaire d'utiliser la remarque suivante.

Le seul coefficient qui subisse par la bande un changement notable, c'est γ' dont la valeur ordinaire $-f \operatorname{tang}\theta - \frac{Q}{H}$ devient

$$-f \operatorname{tang}\theta - \frac{Q}{H} - (ei - ki)\operatorname{tang}\theta + \frac{Ri}{H}.$$

Or c'est précisément là le terme important en $\cos M'$ de la déviation semi-circulaire. Ce sera donc là que portera le principal effet de la bande. Il en résulte que cet effet doit être nul quand $M' = 90°$ et atteindre son maximum quand le navire court nord ou sud. Il suffira donc, à la rigueur, d'observer la déviation dans cette dernière direction et d'en déduire l'effet de

la bande. On calculera une petite Table des valeurs du terme ci-dessus, et on les ajoutera aux déviations ordinaires.

On corrige parfois cette déviation particulière à l'aide d'un aimant vertical placé sous la boussole, dans le billot qui la porte. On introduit ainsi une composante verticale de magnétisme permanent analogue à **R**; nous le désignerons par (**R**). En faisant varier un peu la distance de cet aimant à la boussole, on parvient à rendre nulle l'expression

$$(e - k)\tang\theta - \frac{R + (R)}{H},$$

quel que soit i. Mais cette correction sera relative à la colatitude magnétique sous laquelle elle aura été faite. Si le navire s'en écartait sensiblement, il faudrait faire varier la position de l'aimant correcteur, opération qui n'est pas à conseiller en mer.

Conclusion.

On voit, par ce qui précède, tout l'avantage d'une théorie sur l'empirisme; la théorie seule peut servir de guide dans l'interprétation de phénomènes si complexes. Cependant il convient de reconnaître que la théorie de Poisson repose sur certaines hypothèses qui ne se trouvent pas entièrement réalisées dans l'application. Ainsi les formules supposent que la demi-longueur de l'aiguille est une quantité évanouissante vis-à-vis des distances qui séparent le compas des pièces de fer les plus voisines. Il faut donc, dans la pratique, employer des aiguilles très courtes et au besoin les accoupler pour avoir une force directrice suffisante. Ces formules supposent encore que le fer du navire ne se compose que de fer absolument doux et de fer absolument aigre et coercitif, conservant toujours la même constitution moléculaire, en sorte que le premier s'aimante aussitôt sous l'action inductrice de la Terre quand il vient à être dirigé convenablement pour la subir, et le perd aussitôt quand sa direction change, tandis que le second conserve dans tous les cas son magnétisme primitif. En réalité, les fers des vais-

seaux n'ont pas des propriétés si tranchées. Les fers incomplètement doux ont besoin d'un certain temps pour s'aimanter lorsqu'ils prennent la direction de la force magnétique du globe, et il leur faut du temps pour perdre le magnétisme une fois acquis. De même le fer dur ne possède jamais un magnétisme absolument permanent. La théorie de Poisson, malgré les grands services qu'elle rend à la marine, n'est donc qu'une représentation approchée des phénomènes que le navigateur a tant d'intérêt à connaître exactement. De là la règle prudente que celui-ci s'impose de saisir toutes les occasions qui se présentent de contrôler ses indications à l'aide d'observations astronomiques donnant l'azimut absolu de sa route.

Lorsque le ciel est couvert, ces observations étant impossibles, le navigateur n'est pourtant pas à la merci des déviations de ses compas. Il lui reste un moyen simple, dont nous avons déjà dit quelques mots, de les déterminer. Il suffit de mettre à la mer, sans interrompre la route, un canot muni d'un compas et traîné à la remorque à une distance assez grande pour que le fer du navire soit sans influence. Le timonier placé dans cette embarcation lira sur son compas le cap magnétique vrai du navire, tandis qu'à bord on aura le cap magnétique dévié. Même en temps de brouillard, lorsqu'on ne voit pas à vingt pas devant soi, ce procédé donnera d'excellents résultats, pourvu que la ligne de foi de la boussole du canot réponde bien à la direction de la remorque. Il pourrait même être employé en rade à la régulation des compas lorsque les repères nécessaires manquent à l'horizon. Au lieu d'un canot monté par un observateur, on obtiendra le même résultat en plaçant la boussole sur une sorte de bateau de loch, pourvu qu'on ait le moyen d'enregistrer ou de fixer la direction de l'aiguille loin du navire sur la rose du compas remorqué. Quoi qu'il en soit, la régulation des compas, tout comme la marche des chronomètres, a besoin d'être contrôlée avec soin, surtout au moment d'atterrir.

CHAPITRE XXIV.

LOXODROMIE.

Le cap du navire en A étant placé dans la direction AB et maintenu de manière à couper les méridiens successifs PA, PB, ... sous un angle constant V, la courbe suivie se trouve caractérisée géométriquement, et il est facile d'en avoir l'équation. Soient λ et L les coordonnées du point de départ A, λ' et

Fig. 55.

L' celles du point d'arrivée B; si l'arc AB décrit par le navire est un infiniment petit dv, $\lambda' - \lambda$ sera représenté par $d\lambda$ et L' − L par $-dL$, puisque nous comptons les longitudes en sens inverse des azimuts de route V. Par le point B menons l'arc BC perpendiculaire au méridien PA; nous aurons

$$\text{AC} \quad \text{ou} \quad dv\cos V = d\lambda,$$
$$\text{BC} \quad \text{ou} \quad dv\sin V = -dL\sin\lambda.$$

L'intégrale de la première est

$$(1) \qquad \lambda' - \lambda = v\cos V.$$

Pour la seconde, qui contient trois variables L, v et λ, il faut éliminer dv, ce qui donne

$$dL = -\operatorname{tang} V \frac{d\lambda}{\sin\lambda}.$$

Comme $\frac{d\lambda}{\sin\lambda}$ est la différentielle de $\mathcal{L}\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}$, $\mathcal{L}$ désignant un

logarithme népérien, on aura, pour l'intégrale prise entre λ et λ',

$$(2)\qquad L' - L = -\left(\mathcal{L}\,\mathrm{tang}\,\frac{\lambda'}{2} - \mathcal{L}\,\mathrm{tang}\,\frac{\lambda}{2}\right)\mathrm{tang}\,V.$$

Considérons L et λ comme les coordonnées du point de départ, et posons $L = 0°$ et $\lambda = 90°$, c'est-à-dire faisons commencer la courbe à l'équateur; la relation précédente devient, après avoir supprimé les accents et fait $m = \mathrm{tang}\,V$,

$$L = -m\mathcal{L}\,\mathrm{tang}\,\frac{\theta}{2} \quad \text{ou} \quad e^{L} = \cot^m \frac{\lambda}{2} \ (^1).$$

C'est l'équation sphérique de la loxodromie. Cette courbe circule autour de la sphère en se rapprochant du pôle, où elle n'arrive qu'après avoir décrit une infinité de spires, car, pour $\lambda = 0$, $\cot^m \frac{\lambda}{2}$ et par suite L doivent être infinis.

Par deux points quelconques de la sphère on peut faire passer une infinité de loxodromies; mais, si l'on y joint la condition que la courbe ne fasse pas de spires complètes dans l'intervalle en tournant une fois, deux fois, etc., autour de la sphère, il n'y en a que deux qu'on suivra, l'une en allant de A vers B dans l'est, l'autre de A vers B dans l'ouest. C'est généralement la plus courte des deux que l'on considère, celle où la différence des longitudes $L' - L < 180°$.

Problèmes de route.

Dans la pratique, les deux problèmes suivants se présentent continuellement. 1° On donne le point de départ (L, λ) et le point d'arrivée (L', λ') : trouver V et v, c'est-à-dire l'azimut loxodromique qu'il faut suivre et la distance loxodromique à parcourir. 2° On donne le point de départ (L, λ) et la route suivie (V, v) : trouver les coordonnées (L', λ') du point d'arrivée. Les équations (1) et (2) résolvent ces deux pro-

---

(1) e est ici la base des logarithmes népériens.

blèmes; seulement il faut multiplier le second membre de (2) par 3437',7 pour le réduire en minutes ou en milles marins. Si l'on n'a pas de Tables de logarithmes népériens et qu'on veuille leur substituer des logarithmes ordinaires deux fois plus petits environ que les premiers, il faut multiplier les seconds par $\frac{1}{\log e} = 2{,}3025851$. Cette équation, ainsi préparée pour le calcul, devient

$$L' - L = -7915',705\left(\log\operatorname{tang}\frac{\lambda'}{2} - \log\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}\right)\operatorname{tang}V.$$

Par exemple, on demande la route de Fernambouc à Hobartown en allant à l'est.

Données :	λ........	98° 3'	L........	322° 50'
	λ'.......	132.53	L'.......	145. 0 + 360°
	$\lambda'-\lambda$...	34.50	L' — L...	182.10 = 10930'

$\frac{1}{2}\lambda'$.....	66° 26',5	$\log\operatorname{tang}\frac{\lambda'}{2}$.....	0,36049	log diff.....	9,47606
$\frac{1}{2}\lambda$......	49° 1',5	$\log\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}$......	0,06122	log 7915',7 .	3,89849*n*
					3,37455*n*
				log(L' — L).	4,03862
		Diff...........	0,29927	log tang V ..	0,66407*n*

V... 282° 13',7

log cos V......	9,32594
log $\lambda'-\lambda$......	3,32015
	3,99421
v.......	9867',6

Ainsi l'azimut loxodromique ou l'angle de route sera 282° 14' et la distance loxodromique sera de 9867',6. Pour faciliter ces calculs, on a publié des Tables de la fonction

$$\mathcal{L}\operatorname{tang}\frac{\lambda'}{2} - \mathcal{L}\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2},$$

en faisant $\lambda' = 90°$, ce qui la réduit à $\mathcal{L}\cot\frac{\lambda}{2}$. L'arc $\lambda' - \lambda$ se trouve alors de $90° - \lambda$ et mesure la distance du parallèle λ à l'équateur, c'est-à-dire la latitude. Le terme ainsi réduit en

Tables, c'est-à-dire $7915', 705\, \mathcal{L}\cot\frac{\lambda}{2}$, porte le nom de *latitude croissante* (*voir* le Chapitre des Cartes marines).

C'est surtout le second problème qui se présente dans la pratique journalière. Pour avoir le point estimé à midi, on ajoute aux coordonnées L et λ de la veille le changement en λ et le changement en L survenus dans les vingt-quatre heures, c'est-à-dire $\lambda' - \lambda$ et $L' - L$. Comme v est alors un assez petit arc (il ne dépasse guère 300′ ou 5°), on remplace la formule (2) par la relation plus simple

$$(3) \qquad L' - L = -\operatorname{tang} V \frac{\lambda' - \lambda}{\sin\frac{\lambda' + \lambda}{2}} = -\frac{v \sin V}{\sin\frac{\lambda' + \lambda}{2}}.$$

Voici comment on y arrive. Ici les limites λ' et λ de l'intégrale de $\frac{d\lambda}{\sin\lambda}$ qui nous a conduit à l'équation (2) sont très rapprochées. En désignant par $F(\lambda)$ cette intégrale, par λ_1 la demi-somme de λ' et de λ, par x leur demi-différence, on aura

$$F(\lambda) = F(\lambda_1 - x) = F(\lambda) \ - xF'(\lambda_1) + \frac{x^2}{1.2} F''(\lambda_1) - \frac{x^3}{1.2.3} F'''(\lambda_1) + \ldots,$$

$$F(\lambda') = F(\lambda_1 + x) = F(\lambda_1) + xF'(\lambda_1) + \frac{x^2}{1.2} F''(\lambda_1) + \frac{x^3}{1.2.3} F'''(\lambda_1) + \ldots.$$

En prenant la différence on a, pour l'intégrale définie, la série

$$F(\lambda') - F(\lambda) = 2xF'(\lambda_1) + 2\frac{x^3}{1.2.3} F'''(\lambda_1) + \ldots,$$

où les termes d'ordre pair ont disparu. On trouve donc

$$F(\lambda') - F(\lambda) = 2xF'(\lambda_1),$$

aux termes près du troisième ordre. Ainsi, pour intégrer $\frac{d\lambda}{\sin\lambda}$ entre deux limites λ' et λ assez rapprochées, il suffit de calculer la dérivée $\frac{1}{\sin\lambda}$ pour la colatitude moyenne $\frac{\lambda' + \lambda}{2}$, puis d'intégrer, en regardant cette dérivée comme constante [1].

---

[1] Nous avons déjà vu un exemple de ce genre dans le Chapitre de la *Connaissance des Temps*.

En d'autres termes,

$$\int_{\lambda}^{\lambda'} \frac{d\lambda}{\sin\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\sin\frac{\lambda' + \lambda}{2}},$$

à très peu près.

Le terme du troisième ordre que nous négligeons est égal à $\dfrac{2\left(\frac{\lambda'-\lambda}{2}\right)^3}{1.2.3}\tang V$ multiplié par la dérivée seconde de $\dfrac{1}{\sin\lambda}$, c'est-à-dire, en remplaçant $\lambda' - \lambda$ par $v\cos V$, à

$$(3438)^2 \frac{v^3}{24} \frac{1 + \cos^2\lambda_1}{\sin^3\lambda_1} \sin V \cos^2 V.$$

En donnant à v la valeur 300′ que ne dépassent guère les navires rapides et à $\sin V \cos^2 V$ sa valeur maximum $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, on calcule aisément ce troisième terme, qui constitue la presque totalité de l'erreur de la formule approchée (3); il ne dépasse pas 0′,13 pour $\lambda_1 = 60°$, 0′,245 pour $\lambda_1 = 50°$ et 0′,56 pour $\lambda_1 = 30°$. La navigation ordinaire restant comprise entre $\lambda = 30°$ et $\lambda = 180° - 30°$, la formule approchée est assez exacte pour l'usage continuel qu'on en fait dans la pratique.

Routes composées.

Dans la navigation à voiles, l'angle de route et la vitesse sont subordonnées au vent et varient souvent dans les vingt-quatre heures. La ligne décrite par le navire se compose alors d'une série d'arcs de loxodromies $v, v', v'', \ldots$ courus sous les angles $V, V', V'', \ldots$, à quoi il faut ajouter le chemin u parcouru sous l'angle U, dans l'intervalle d'un jour, par la masse d'eau qui porte le navire, si cette masse est entraînée dans un courant de vitesse et de direction données. Le changement total en λ sera

$$\lambda' - \lambda = v\cos V + v'\cos V' + \ldots + u\cos U.$$

Le changement en longitude sera

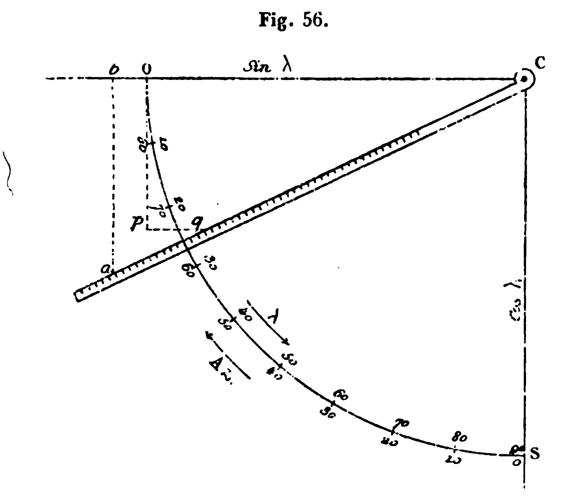
$$L' - L = -\frac{1}{\sin\frac{\lambda' + \lambda}{2}}(v\sin V + v'\sin V' + \ldots + u\sin U).$$

C'est ce qu'on appelle *faire le point*. On a pour cela des Tables spéciales qui donnent les produits $v \cos V$ et $v \sin V$ pour des valeurs équidistantes des deux arguments v et V. Ce sont donc des Tables à double entrée.

Quartier de réduction.

On obtient graphiquement, sans compas, les termes précédents au moyen d'un petit instrument bien facile à construire. Prenez une feuille de papier millimétrique et collez-la sur une

Fig. 56.



planchette légère. D'un point C, placé à l'angle supérieur de droite, décrivez un quart de cercle SO que vous diviserez en degrés à l'aide d'un rapporteur. Ces degrés devront être numérotés de S vers O, dans le sens des azimuts, et il faudra inscrire d'autres numéros allant en sens inverse de O vers S. Cela posé, faisons tourner autour d'un petit pivot placé en C une réglette d'ivoire divisée en millimètres à partir du centre C. Il sera facile de résoudre à vue tous les cas des triangles rectangles et d'obtenir, en particulier, les produits $v \cos V$, $v \sin V$ et même $\frac{v \sin V}{\sin \lambda_1}$.

Pour cela, placez la réglette sur la division V, en allant de S vers O, et notez-y la division a, telle que $Ca = v$; on lira aussitôt sur le quadrillage (omis sur la figure) les longueurs $ab = Ca \cos V$, $Cb = Ca \sin V$. Pour diviser $v \sin V$ ou plutôt une longueur quelconque Op par $\sin \lambda_1$, placez la réglette sur la division λ_1 comptée en sens inverse des azimuts, c'est-à-dire de O vers S, et suivez la parallèle pq jusqu'à la rencontre de la réglette en q. On aura évidemment $Op = Cq \sin \lambda_1$, et par suite $Cq = \dfrac{Op}{\sin \lambda_1}$ [1].

Si l'on n'avait pas de réglette d'ivoire tournant autour d'un petit pivot en C, on la remplacerait par une simple bande de papier millimétrique qu'on ferait passer par le centre C, de manière que le zéro de ses divisions coïncidât avec ce centre. Les millimètres étant trop petits pour représenter commodément des milles marins, on prendrait une échelle plus grande. Le quartier de réduction n'est pas autre chose. Seulement, au lieu d'une réglette, on tend un fil attaché en C, et, comme ce fil ne saurait porter des divisions, on y supplée en traçant autour du point S une foule de cercles concentriques qui compliquent beaucoup la figure.

On voit combien il est aisé de calculer avec cet instrument une route composée lorsqu'on en a sous les yeux les éléments v et V, v' et V', v'' et V'', etc. Si l'on a dû retrancher 180° de V pour opérer avec ce quadrant, il faudra affecter les résultats du signe —; s'il a fallu retrancher 90° ou 270°, on oriente la réglette en se servant de la graduation opposée à celle des azimuts.

Degré de précision du point estimé.

Le loch ne donne guère la vitesse qu'au vingtième. D'autre part, l'angle de route $V = M' + D + \delta + d$ n'est jamais connu avec une grande précision.

---

[1] Ce petit appareil remplacerait au besoin, pour tous les calculs à trois décimales, une Table de logarithmes trigonométriques et s'appliquerait à toutes les formules.

La dérive, par exemple, ne s'obtient qu'à quelques degrés près, et, quant à M', il est bien difficile de gouverner à 1° près. Enfin les courants sont souvent ou négligés ou imparfaitement connus. Ce n'est donc pas exagérer que de porter à $\pm 3^{\circ}$ l'erreur probable de l'angle de route, surtout si le navire prend de la bande. Ces 3° font aussi à peu près $\frac{1}{20}$, en adoptant le rayon pour unité.

Or, en différentiant les équations (1) et (4), il vient

$$\begin{aligned} d(L'-L)\sin\frac{\lambda'+\lambda}{2} &= -dv\sin V + v\cos V\,dV,\\ d(\lambda'-\lambda) &= dv\cos V - v\sin V\,dV. \end{aligned}$$

Donnant aux différentielles la signification d'erreurs probables et remplaçant dv par $\frac{v}{20}$, dV par $\frac{1}{20}$, nous aurons

$$\begin{aligned} d(L'-L)\sin\frac{\lambda'+\lambda}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{v\sin V}{20}\right)^2+\left(\frac{v\cos V}{20}\right)^2} = \pm\frac{v}{20},\\ d(\lambda'-\lambda) &= \pm\sqrt{\left(\frac{v\cos V}{20}\right)^2+\left(\frac{v\sin V}{20}\right)^2} = \pm\frac{v}{20}. \end{aligned}$$

Or $d(L'-L)\times\sin\frac{\lambda'+\lambda}{2}$ est l'erreur de la longitude évaluée en arc de grand cercle, tandis que $d(\lambda'-\lambda)$ est l'erreur dans le sens du méridien.

Si le navire file 12 nœuds par heure, l'erreur sera de 0',6; au bout de trois ou quatre jours de temps couvert elle ira à près de 1°, et cette incertitude de ±60 milles sur l'espace parcouru pèsera aussi bien sur la longitude que sur la colatitude; l'aire d'incertitude sera celle d'un cercle de près de 120 milles de diamètre. On voit par là combien il importe à la sécurité de la navigation rapide de perfectionner les procédés de l'estime, dont nous venons même d'exagérer l'exactitude.

CHAPITRE XXV.

CARTES GÉOGRAPHIQUES.

On ne saurait représenter sur un plan, en vraie grandeur, les figures tracées sur une sphère. Ces figures seront toujours plus ou moins altérées, quel que soit le mode de projection ou de développement adopté. Considérons, en effet, un élément plan infiniment petit de la surface de la sphère, et supposons-lui la forme triangulaire. Ce triangle pourra être reproduit fidèlement sur la Carte, mais non les triangles voisins qui, sur la sphère, se rattachent au premier dans des plans différents. Il faudra les altérer sur la Carte pour qu'ils se rejoignent par leurs côtés communs sans déchirure ni duplicature. Ces côtés devront être dilatés ou rétrécis dans un certain rapport, lequel variera, en général, d'un point à l'autre de la Carte, et, autour de chaque point, suivant la direction.

Les systèmes de Cartes doivent changer selon les conditions que l'on impose à ces dilatations diverses. Supposons, par exemple, qu'un triangle ABC infiniment petit de la sphère devienne le triangle *abc* sur la Carte. La déformation linéaire dans le sens *ab* sera $\frac{ab}{\mathrm{AB}}$; dans le sens perpendiculaire (celui de la hauteur), ce sera $\frac{cd}{\mathrm{CD}}$. Si l'on choisit un système tel que, par toute la Carte, l'un de ces rapports soit égal à l'inverse de l'autre, c'est-à-dire si $\frac{ab}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{CD}}{cd}$, on en conclura l'égalité $ab \times cd = \mathrm{AB} \times \mathrm{CD}$. Par suite, la somme des surfaces des triangles élémentaires qui composent une figure de grandeur finie sera la même sur la sphère et sur la Carte; les surfaces seront donc conservées. Telle est la Carte de France, dite *Carte de l'État-Major;* les angles et les distances y sont légèrement altérés, mais non les superficies.

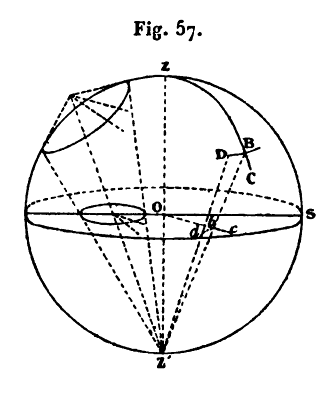
Si l'on choisit un système de projection ou de développement tel que les deux rapports susdits soient égaux, les deux triangles élémentaires de la Carte et de la sphère seront semblables, et il en sera de même de deux figures infiniment petites quelconques tracées sur l'une et l'autre surface. Les angles seront donc conservés. Il suffit que la dilatation soit la même dans deux sens rectangulaires *ab*, *cd*; cette condition étant remplie, elle le sera encore pour toutes les directions autour d'un même point.

Ce dernier cas est le seul qui intéresse la navigation. Nous en donnerons deux exemples, l'un par projection, l'autre par développement.

Projection stéréographique.

Prenons pour plan de projection un plan diamétral de la sphère; plaçons le point de vue en Z' à l'un des pôles de ce plan et construisons sur ce plan la perspective ou projection conique de l'hémisphère supérieur. Un point quelconque B, déterminé sur la sphère par ses coordonnées sphériques rap-

Fig. 57.



portées au point Z, à savoir

Distance zénithale.... $z = ZB$,
Azimut............ $A = SZB$,

aura sur la Carte, pour coordonnées,

$$Ob = \text{tang}\frac{z}{2},$$
$$SOb = A,$$

en prenant le rayon pour unité.

Si l'arc ZB ou z varie de dz, Ob variera de $d\,\text{tang}\frac{z}{2} = \frac{dz}{2\cos^2\frac{z}{2}}$; par conséquent, $\frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}}$ sera, en ce sens, le rapport de déformation linéaire ou $\frac{bc}{BC}$. Portons sur la sphère un élément BD $= dz$ dans le sens perpendiculaire à BC, et soit bd sa projection sur la Carte; la dilatation linéaire sur la Carte sera, en ce sens, $\frac{bd}{BD}$. Or

$$\frac{bd}{BD} = \frac{bZ'}{BZ'} = \frac{\text{séc}\frac{z}{2}}{2\cos\frac{z}{2}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}}.$$

Les dilatations linéaires étant les mêmes dans ces deux sens, elles le seront dans toutes les directions intermédiaires. Les angles sont donc conservés sur ce genre de projection.

La dilatation varie néanmoins d'un point à l'autre de la Carte. Vers le centre, où $z = 0$, le rapport $\frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}}$ se réduit à $\frac{1}{2}$; en d'autres termes, dans cette région-là, les dimensions linéaires prises sur la sphère sont réduites de moitié sur la Carte. Sur les bords, $z = 90^\circ$; le même rapport est égal à l'unité et les dimensions linéaires de la sphère se trouvent conservées dans cette région. Les surfaces varient aussi; réduites au quart vers le centre, elles sont égales à celles de la sphère sur les bords. En moyenne, la réduction des surfaces est $\frac{1}{2}$, puisque l'hémisphère supérieur est représenté sur la Carte par la surface d'un grand cercle de la sphère.

Ce qui fait le mérite particulier de cette projection, c'est que

les cercles de la sphère y sont représentés par des cercles ([1]), courbes faciles à construire avec exactitude. En effet, circonscrivons à la sphère, le long d'un de ces cercles, un cône, et mettons-en les génératrices ainsi que le cercle de contact en projection stéréographique. Puisque les angles sont conservés, les projections des génératrices émanant toutes d'un même point seront coupées normalement par la projection du cercle; cette projection sera donc elle-même un cercle dont le centre, comme on le voit, ne sera pas du tout la projection du centre ou du pôle du cercle de la sphère, mais celle du sommet du cône circonscrit (Chasles).

Pour construire le canevas d'une mappemonde en projection sur un méridien, on remarquera que le méridien central aura pour projection la droite NS, l'équateur la droite EO. Les divisions de l'équateur s'obtiennent en rabattant ce grand cercle sur la partie supérieure de la figure en ENO. Alors le point

Fig. 58.

de vue se rabat en S. On divisera en parties égales le demi-cercle ENO et l'on joindra les points de division au point de vue rabattu en S. Ces droites couperont la ligne EO et y traceront les divisions équatoriales du canevas ([2]). Par chacun des

([1]) Ou par des droites dans le cas particulier où le cercle passe par le point de vue Z'.

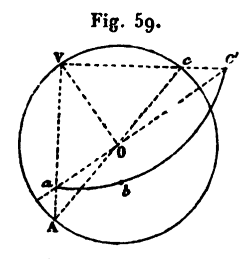
([2]) La division de 0° à 30° sera $r \operatorname{tang} \frac{30^\circ}{2}$; celle de 0° à 60° sera $r \operatorname{tang} \frac{60^\circ}{2}$, etc., en désignant par r le rayon de la sphère.

points de division et par les points N, S on fera passer un arc de cercle qui représentera le méridien correspondant. Les divisions du méridien central NS s'obtiennent de la même manière en rabattant ce méridien à gauche sur le demi-cercle NOS et en joignant les points de division au point de vue rabattu en E. Pour tracer un parallèle on fera passer un arc de cercle par les trois points de division de même colatitude.

On emploie aussi la projection sur l'équateur. Les méridiens sont alors représentés par les rayons du cercle équatorial, les parallèles par des cercles concentriques à l'équateur. Au lieu de diviser graphiquement le méridien central, il est plus exact d'en calculer les diverses portions. Soit r le rayon adopté pour le cercle équatorial; on aura, pour les parallèles de 10°, 20°, 30°, ... de colatitude, $r \tan 5°$, $r \tan 10°$, $r \tan 15°$, ... Comme on a introduit l'usage de ces Cartes dans la marine afin de remplacer la résolution numérique des triangles par une simple construction graphique, nous en dirons ici quelques mots. Voici d'abord plusieurs problèmes auxiliaires.

Faire passer un arc de grand cercle par deux points a et b. Par le point a menez le diamètre aO, puis la perpendiculaire OV à ce diamètre, et enfin la droite Va qui rencontre en A la circonférence de la Carte. Le diamètre AO rencontre ce

Fig. 59.



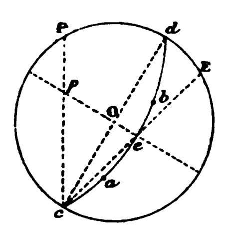
cercle en c; menez Vc qui coupe aO en c'. Le point c' appartient à la circonférence cherchée. Pour la tracer, il suffit donc de faire passer un cercle par les trois points a, b, c'.

Cette construction résout le problème de la navigation sur la ligne la plus courte entre deux points, c'est-à-dire sur l'arc de

grand cercle qui les unit. Cet arc étant tracé sur la Carte stéréographique, on relève aisément les coordonnées de plusieurs de ses points, surtout si l'on se sert d'une Carte polaire; on reporte ces points sur une Carte marine, et on les joint par de petits arcs de loxodromie. Si l'on appliquait cette construction au cas traité à l'article *Loxodromie*, route de Fernambouc à Hobartown par l'est, on verrait que l'arc de grand cercle passe près du pôle sud et est par conséquent impraticable.

Trouver le pôle d'un grand cercle ab tracé sur la Carte. Ce grand cercle coupe celui de la Carte en deux points diamétralement opposés *c*, *d*. Le pôle *p* se trouvera sur le grand cercle projeté sur le diamètre O*e*, perpendiculaire à *cd*. Faites

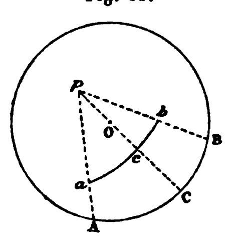
Fig. 60.



tourner ce grand cercle de manière à le rabattre sur la figure; le point de vue se rabattra en *c*, et, en menant *ce*, on aura en E le point dont la projection est *e*. Portez un arc de 90° de E en P; P sera le pôle cherché, et sa projection sera *p*.

Trouver la vraie grandeur de l'arc ab. Il suffit de mener

Fig. 61.

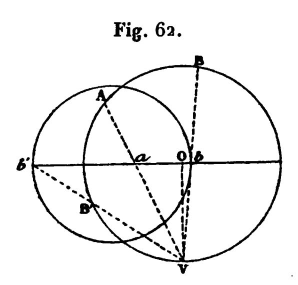


par le pôle *p* de cet arc les droites *pa* et *pb*; l'arc AB sera

la vraie grandeur de l'arc ab. En effet, menons pOC. La portion de sphère projetée en BpC est une sorte de fuseau ayant pour arête la ligne PV, P étant le pôle de bc pris sur la sphère et V le pôle de BC. Il en résulte évidemment que l'arc correspondant à bc sur la sphère est égal à BC.

Autour d'un point a donné sur la Carte, décrire un petit cercle de rayon sphérique z. Le point de vue étant rabattu en V, tirez Va; A sera le rabattement du point de la

Fig. 62.

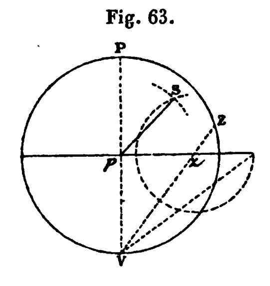


sphère projeté en a. Portez l'arc z en AB et AB', et construisez les projections b et b' de ces deux points. Le petit cercle cherché devra être décrit sur ab comme diamètre.

Cela posé, voici la solution graphique de deux problèmes usuels dans la navigation astronomique.

1° En un lieu de colatitude λ on a mesuré la distance zénithale z du Soleil, dont la distance polaire est δ : trouver l'heure, c'est-à-dire l'angle dièdre opposé au côté z du triangle PZS.

Fig. 63.

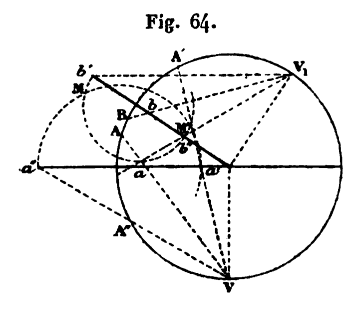


Prenez PZ $= \lambda$ et menez ZV. Le point z sera la projection du

zénith et p celle du pôle. Décrivez autour de p un petit cercle de rayon sphérique δ, et, par le problème précédent, construisez autour de z un petit cercle de rayon sphérique égal à la distance zénithale donnée z. Joignez le point de rencontre s de ces deux circonférences au centre p, et mesurez l'angle spz au rapporteur; ce sera l'angle horaire Æ de l'astre observé.

2° En un lieu dont on ignore complètement les coordonnées géographiques, on a mesuré les distances zénithales z et z' de deux astres connus : déterminer la position de l'observateur sur le globe terrestre.

Fig. 64.



On suppose en outre connue l'heure de Paris. Pour cette heure, la *Connaissance des Temps* donne les coordonnées uranographiques des deux astres; on en déduit aisément les coordonnées géographiques des points A et B, auxquels ces astres répondent sur le globe terrestre à l'instant considéré. Soient a et b leurs projections sur une mappemonde polaire. On décrit le petit cercle ayant pour pôle le point représenté par a et pour rayon sphérique $AA' = AA'' = z$; puis le petit cercle ayant pour pôle le point b et pour rayon sphérique $BB' = BB'' = z'$. Ces deux cercles se coupent en M et M', l'un sur l'hémisphère austral, l'autre sur l'hémisphère boréal (dans le cas actuel). L'observateur n'hésitera pas entre ces deux solutions, car il sait toujours d'avance sur quel hémisphère il se trouve. Par une construction soignée et à grande échelle on résoudra le problème à $\frac{1}{4}$ de degré près. C'est la question des cercles de hauteur, qui sera amplement traitée plus loin.

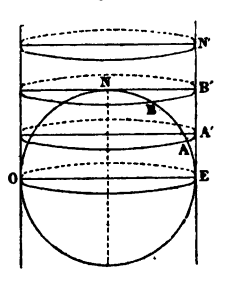
CHAPITRE XXVI.

CARTES MARINES.

Cartes plates.

La projection précédente ne permet pas de tracer les arcs de loxodromie, car ceux-ci y deviennent des arcs de spirale logarithmique. On ne saurait donc y reporter la marche d'un navire et résoudre graphiquement par ce moyen les diverses questions relatives aux routes. Il faut recourir à une projection ou plutôt à un développement où ces lignes soient représentées par des droites. On croyait, il y a quelques siècles, satisfaire à cette condition au moyen des Cartes *plates*, dont le canevas se compose d'un système de droites parallèles équidistantes pour les méridiens, et d'un système de droites équidistantes, perpendiculaires aux premières, pour les parallèles. Circonscrivons à la sphère, le long de l'équateur, un cylindre

Fig. 65.



sur lequel nous reporterons les parallèles de la sphère en les espaçant également, de manière que le méridien EABN et ses divisions se retrouvent en vraie grandeur sur la génératrice correspondante EN'. Si l'on fend ce cylindre suivant une gé-

nératrice, et qu'on le développe sur un plan, on aura une Carte plate, excellente d'ailleurs pour les régions équatoriales, mais déformant considérablement les régions polaires, puisque le pôle y est représenté par une droite égale à l'équateur.

Il semble au premier coup d'œil que les angles y soient conservés, puisque les parallèles et les méridiens s'y rencontrent à angle droit comme sur la sphère; on a donc pu croire que les loxodromies y sont représentées par des droites coupant les méridiens sous les mêmes angles que sur la sphère. Mais les choses ne se passent pas ainsi : sauf les angles des méridiens et des parallèles, tous les autres sont plus ou moins altérés.

Nous avons vu en effet que la condition à laquelle toute Carte doit satisfaire pour conserver les angles, c'est que la déformation des éléments linéaires soit la même en tout sens autour de chaque point. Or, dans les Cartes plates, la déformation dans le sens d'un méridien quelconque est nulle, tandis que, sur un parallèle de colatitude λ, les éléments rectilignes se trouvent dilatés dans le rapport de $\sin\lambda$ à l'unité. En effet, les portions de parallèles comprises entre deux méridiens vont en diminuant sur la sphère, tandis qu'ils conservent même longueur sur la Carte à toute colatitude. Il en résulte qu'un cercle infiniment petit de rayon $d\lambda$ sur la sphère est représenté sur la Carte plate par une ellipse ayant $d\lambda$ pour demi-petit axe dans le sens du méridien et $\dfrac{d\lambda}{\sin\lambda}$ pour demi-grand axe dans le sens du parallèle. Comme les diamètres conjugués (rectangulaires) du petit cercle de la sphère répondent, sur la Carte, aux diamètres conjugués de l'ellipse, les directions ou les angles seront aisément calculés tout autour du point choisi comme centre (Tissot). La plus grande altération d'angle aura lieu entre les diamètres conjugués égaux. Soient U leur angle et dx leur longueur; on aura, par les deux théorèmes d'Apollonius,

$$2dx^2 = d\lambda^2 + \left(\frac{d\lambda}{\sin\lambda}\right)^2,$$

$$(dx\sin \mathrm{U})^2 = d\lambda \times \frac{d\lambda}{\sin\lambda}.$$

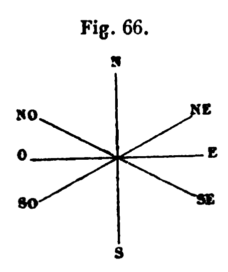
En éliminant dx, on tire de ces deux relations

$$\sin U = \frac{2 \sin \lambda}{1 + \sin^2 \lambda}.$$

Par exemple, à la colatitude de 45°, on trouverait $U = 70°$ pour l'angle de deux diamètres conjugués égaux représentant, sur la Carte plate, l'angle de deux diamètres conjugués de la sphère, c'est-à-dire 90°.

Ainsi, sur les Cartes plates, les angles ne sont représentés rigoureusement que dans une zone équatoriale infiniment étroite pour laquelle $\lambda = 90°$ et $\sin U = 1$. A mesure qu'on s'écarte de cette zone, les angles (autres que ceux des méridiens et des parallèles) sont de plus en plus altérés. A 45°, la rose des vents aurait sur la Carte la figure suivante :

Fig. 66.



Un arc de loxodromie ne pourrait donc être représenté sur la Carte par une droite, sauf les cas où l'angle de route serait nul ou droit. La navigation ayant manifesté dès le XVIe siècle des besoins de précision incompatibles avec l'emploi de ces Cartes, un géomètre hollandais, Gérard Koopman (en latin Mercator), proposa le système des Cartes réduites, qu'on aurait dû plutôt appeler *dilatées*.

Cartes marines. — Développement de Mercator.

Il suffisait, tout en conservant le canevas rectiligne des Cartes plates, d'espacer différemment les parallèles, de manière à rendre en chaque point la dilatation dans le sens d'un méridien égale à la dilatation subie par le parallèle. Or celle-ci

est $\frac{1}{\sin\lambda}$; il fallait donc dilater aussi chaque élément $d\lambda$ d'un méridien dans le même rapport, c'est-à-dire transformer sur la Carte chaque $d\lambda$ en $\frac{d\lambda}{\sin\lambda}$. Par suite, une portion finie du méridien prise entre les colatitudes λ et λ' devient une somme d'éléments $d\lambda$ diversement dilatés depuis $\frac{d\lambda}{\sin\lambda}$ jusqu'à $\frac{d\lambda}{\sin\lambda'}$; autrement dit, l'arc $\lambda' - \lambda$ de la sphère devient sur la Carte l'intégrale de $\frac{d\lambda}{\sin\lambda}$ prise entre les limites λ et λ'. Nous avons déjà vu, à propos de la loxodromie, que cette intégrale ainsi définie est

$$\mathcal{L}\tan g\,\lambda' - \mathcal{L}\tan g\,\lambda.$$

Mais ici le pôle ne saurait être pris pour origine, car tout arc compris entre 0° et λ' devient, sur la Carte,

$$\mathcal{L}\tan g\,\lambda' - \mathcal{L}0,$$

c'est-à-dire ∞. Les pôles sont donc rejetés à l'infini. Pour calculer l'espacement des parallèles, nous aurons recours à leurs distances à l'équateur en prenant l'intégrale ci-dessus de λ à 90°, ce qui donne

$$\mathcal{L}\tan g\,45^\circ - \mathcal{L}\tan g\frac{\lambda}{2} = \mathcal{L}1 - \mathcal{L}\tan g\frac{\lambda}{2} = \mathcal{L}\cot\frac{\lambda}{2},$$

ou bien en introduisant les facteurs numériques destinés à exprimer le résultat en minutes au moyen des logarithmes ordinaires,

$$7915',705\,\mathcal{L}\cot\frac{\lambda}{2} \quad (\text{log. du fact.} = 3{,}89849).$$

En voici le calcul de 10° en 10°:

λ.	$\frac{\lambda}{2}$.	$\log\cot\frac{\lambda}{2}$.	$\log\log\cot\frac{\lambda}{2}$.	log dist. à l'éq.	Dist. à l'éq.
20°	10°	0,75368	9,87719	3,77568	5966',0 = 99°.26',0
30	15	0,57195	9,75736	3,65585	4527,4 = 75.27,4
40	20	0,43893	9,64240	3,54089	3474,5 = 57.54,4
50	25	0,33133	9,52026	3,41875	2622,7 = 43.42,7
60	30	0,23856	9,37761	3,27609	1888,4 = 31.28,4
70	35	0,15477	9,18969	3,08818	1225,1 = 20.25,1
80	40	0,07619	8,88190	2,78039	603,1 = 10. 3,1
90	45	0	$-\infty$	$-\infty$	0 0

Cette Table, plus développée, est employée par les marins sous le nom de *Table des latitudes croissantes,* parce que la distance d'un point du globe (de colatitude λ) à l'équateur, c'est-à-dire $90° - \lambda$, porte le nom de latitude l et se trouve représentée sur la Carte par

$$\mathcal{L}\cot\frac{\lambda}{2} = \mathcal{L}\cot\left(45° - \frac{l}{2}\right) = \mathcal{L}\operatorname{tang}\left(45° + \frac{l}{2}\right).$$

Par exemple, la latitude de 70°, qui répond à $\lambda = 20°$, est représentée sur la Carte par 99°26′. On voit avec quelle rapidité l'espacement des parallèles augmente sur la Carte à mesure qu'ils s'écartent de l'équateur.

Influence de l'aplatissement.

Cette influence est minime; nous en parlerons néanmoins, afin de ne rien laisser à désirer à ce sujet. Sur l'ellipsoïde terrestre, le rayon d'un parallèle de colatitude λ n'est pas $r\sin\lambda$ comme sur une sphère de rayon r, mais $N\sin\lambda$, N étant la grande normale dans la région considérée. Un élément de méridien n'est plus $r\,d\lambda$, mais $R\,d\lambda$, R étant le rayon de courbure de l'ellipse méridienne. On a vu (p. 41) qu'en désignant par e l'excentricité de cette ellipse et par a son demi-grand axe,

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\lambda}}, \quad R = \frac{N^3}{a^2}(1 - e^2).$$

D'après cela, l'expression $\dfrac{d\lambda}{\sin\lambda}$ que nous avions à intégrer pour la sphère devient, pour l'ellipsoïde,

$$\frac{N^3(1 - e^2)\,d\lambda}{a^2 N\sin\lambda} = \frac{(1 - e^2)\,d\lambda}{\sin\lambda(1 - e^2\cos^2\lambda)}.$$

Or $1 - e^2$ divisé par $1 - e^2\cos^2\lambda$ donne pour quotient, quand on s'en tient aux termes en e^2,

$$1 - e^2 + e^2\cos^2\lambda \quad \text{ou} \quad 1 - e^2\sin^2\lambda;$$

on aura donc, pour la différentielle ci-dessus,

$$\frac{d\lambda}{\sin\lambda} - e^2 \sin\lambda\, d\lambda,$$

dont l'intégrale, prise de λ à $90°$, sera

$$\mathcal{L}\tan 45° - \mathcal{L}\tan\frac{\lambda}{2} - e^2\cos\lambda,$$

ou bien, avec les facteurs numériques déjà employés,

$$7915',705 \log\cot\frac{\lambda}{2} - 3438' e^2 \cos\lambda.$$

Il suffira donc de retrancher des nombres précédents les valeurs du petit terme en e^2.

λ.	Sur la sphère, lat. croiss.	Deuxième terme.	Sur l'ellipsoïde, lat. croiss.	Latitudes.
20°	99°.26',0	21',9	99°. 4',1	70°
30	75.27,4	20,2	75. 7,2	60
40	57.54,4	17,9	57.36,5	50
50	43.42,7	15,0	43.27,7	40
60	31.28,4	11,7	31.16,7	30
70	20.25,1	8,0	20.17,1	20
80	10. 3,1	4,1	9.59,1	10
90	0	0	0	0

Il y a une autre nuance. Le rayon de la Terre, considérée comme sphérique, est, d'après les déterminations les plus récentes, de $6\,367\,450^{m}$; par suite, l'arc de $1'$ sur un méridien ou sur l'équateur vaut $1852^{m},22$. Pour l'ellipsoïde, le rayon dont on doit se servir est celui de l'équateur $a = 6\,378\,284^{m}$. L'arc de $1'$ est, à l'équateur, $\frac{a}{3437',7} = 1855^{m},38$, tandis que l'arc de $1'$ pris sur un méridien a pour expression $\frac{R}{3437',7}$ et varie avec la colatitude entre $1861^{m},70$ aux pôles et $1842^{m},79$ à l'équateur. Mais on n'introduit ces légères modifications que dans les Cartes géodésiques où l'on recherche la plus haute précision. Les Cartes marines, prises comme des instruments

de navigation, n'étant pas dans ce cas, il n'y a aucun inconvénient à y considérer la Terre comme une sphère parfaite et à adopter, avec le Bureau des Longitudes, $r = 6\,366\,200^m$ et $1851^m,85$ pour le mille.

Canevas et usage des Cartes marines.

Occupons-nous maintenant du canevas. L'équateur y sera représenté en vraie grandeur; divisons-le, par exemple, de 10° en 10°. Les méridiens seront des droites perpendiculaires à la droite équatoriale et passant par les points de division. Les parallèles seront des droites perpendiculaires aux premières dont l'espacement sera donné par les nombres ci-dessus calculés, à savoir

10°,0 20°,4 31°,5 43°,7 57°,9 75°,5 99°,4 ...,

ou par ces mêmes nombres en millimètres si, dans la petite

Fig. 67.

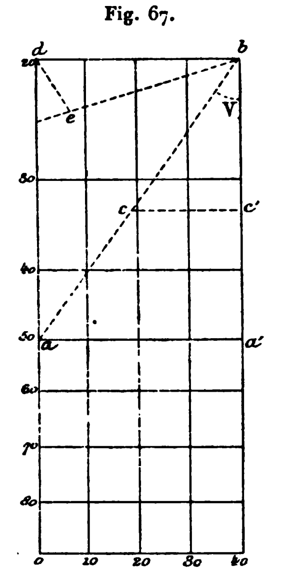


figure ci-jointe, nous prenons 1^{mm} pour 1°. On construira ainsi un canevas jouissant des propriétés suivantes : 1° La dilatation

d'un élément linéaire de la sphère autour d'un point quelconque de colatitude λ est $\frac{1}{\sin\lambda}$ dans toutes les directions autour de ce point. Cette dilatation reste la même tout le long du parallèle de ce point; elle ne varie que d'un parallèle à l'autre. 2° Une figure infiniment petite de la sphère, tracée autour d'un point de colatitude λ, est représentée sur la Carte par une figure semblable; le rapport de similitude est $\frac{1}{\sin\lambda}$. Il n'en sera pas de même des figures de dimensions finies. En effet, pour que deux polygones soient semblables, il ne suffit pas que les angles homologues soient égaux; il faut encore que les côtés soient proportionnels. Or la première condition est satisfaite, mais non la seconde, car la dilatation produite sur la Carte varie d'un parallèle à l'autre. 3° Les arcs de loxodromie y seront représentés par des lignes droites, mais leurs éléments linéaires seront de plus en plus amplifiés vers les pôles.

Ainsi, sur ces Cartes, pour tracer l'arc de loxodromie qui va du point b au point a, il suffira de tirer la droite ba. On aura son azimut loxodromique en b en mesurant au rapporteur l'angle de ba avec le méridien; mais la Carte ne donne pas la vraie longueur de cet arc. De là deux problèmes à résoudre graphiquement.

1° *Étant donné sur la Carte un arc de loxodromie ba, trouver sa vraie grandeur en minutes ou en milles.* Nous avons vu que sur la sphère l'arc de loxodromie AB, représenté par v, donnait lieu à la relation

$$v\cos V = \lambda' - \lambda,$$

λ' et λ étant les colatitudes de ses extrémités a et b. La Carte donne une relation analogue

$$ba\cos V = ba'.$$

Ainsi $\frac{v}{ba} = \frac{\lambda' - \lambda}{ba'}$. Si donc nous portons en bc' la vraie longueur de $\lambda' - \lambda$, il suffira de tirer par c' une parallèle $c'c$ à l'équateur pour avoir en bc la vraie longueur de ba, c'est-à-dire

v. Or nous lisons sur l'échelle des colatitudes la vraie longueur de $\lambda' - \lambda$. Sur la figure, c'est $50° - 20° = 30°$. Prenons au compas ces 30° sur la division équatoriale et portons-la de b en c', puis portons la ligne bc sur l'équateur; nous trouvons 37°. La Carte nous donne donc $v = 37°$, $V = 35°30'$, par une construction aussi simple que rapide, et qui serait bien plus exacte si l'échelle était plus grande. Le calcul nous donnerait:

log tang 25°.	9,6687	log diff............	9,6257	$\lambda' - \lambda = 30°$.	1,4771
log tang 10°.	9,2463	log const...........	3,8985	log cos V...	9,9098
Diff.....	0,4224		3,5242	log v.......	1,5673
		log L' — L = log 2400'.	3,3802	v......	36°55'
		log tang V..........	9,8560		
		V....	35°40'		

2° *Du point* b(L = 40°, λ = 20°), *sous l'angle de route* V = 35°40', *on a parcouru l'arc de loxodromie*

$$v = 36°55' = 2215':$$

construire sur la Carte le point d'arrivée a. Par le point b, sous l'angle donné, on mène une droite indéfinie ba et l'on porte sur cette droite une longueur $bc = v = 36°55'$. Par le point c on mène cc' parallèlement à l'équateur et l'on évalue $bc' = \lambda' - \lambda$ en parties de l'échelle équatoriale. On trouve ainsi $\lambda' - \lambda = 30°$, par suite $\lambda' = 20° + 30° = 50°$. Si l'on mène sur la Carte le parallèle de 50°, cette ligne rencontrera la droite indéfinie ba au point a, dont les coordonnées sont $L' = 0°$, $\lambda' = 50°$. C'est l'inverse de la construction précédente.

Si la route donnée était parallèle à l'équateur, bd par exemple, la construction précédente ne serait plus applicable. Les équations différentielles de la loxodromie se réduiraient alors à

$$dL = -\frac{dv}{\sin\lambda};$$

λ étant constant ici, on en déduit immédiatement

$$L' - L = -\frac{v}{\sin\lambda}.$$

Pour avoir la vraie longueur de *bd*, arc de loxodromie dirigé le long d'un parallèle, on mènera par l'extrémité *b* une droite inclinée de l'angle $\lambda = 20^\circ$ sur *bd*, puis du point *d* une perpendiculaire *de* sur cette droite. En portant *de* sur l'échelle équatoriale, on trouve $13^\circ 42'$.

Les problèmes journaliers de route, si faciles à traiter par le calcul, se résolvent encore plus simplement sur les Cartes, parce que les arcs de loxodromie qu'un navire parcourt d'un midi à l'autre ne dépassent pas un très petit nombre de degrés. L'intervalle $\lambda' - \lambda$ étant assez petit, la déformation correspondante de la Carte varie peu dans un pareil espace ; il est permis de la considérer comme constante et égale à $\dfrac{1}{\sin \dfrac{\lambda' + \lambda}{2}}$. Elle est d'ailleurs la même par toute la zone comprise entre les parallèles λ et λ'. Par suite, la dilatation d'un petit arc dirigé sous l'angle quelconque V est à très peu près égale à celle d'un arc pris sur le méridien par le travers du premier, c'est-à-dire sur le parallèle $\dfrac{\lambda' + \lambda}{2}$. On portera donc cet arc sur le méridien divisé, et on y lira les divisions des extrémités ; la différence donnera la vraie longueur. Réciproquement, lorsqu'on veut porter sur la Carte un arc v sous l'azimut V, on mènera par le point donné une droite faisant l'angle V avec le méridien ; puis, au lieu de prendre l'arc v sur l'échelle équatoriale, on le prendra au compas sur le méridien dans la zone qu'il doit occuper sur la Carte.

Rien de plus simple d'ailleurs que de faire d'avance une figure donnant l'arc de $1'$ dans les diverses régions de la Carte.

Fig. 68.

Soit AB cette longueur à l'échelle de l'équateur. On décrit, avec AB comme rayon, un quart de cercle qu'on divise en degrés ;

on mène en B une tangente et l'on prolonge les rayons jusqu'à cette tangente. Ces droites sont les cosécantes des colatitudes, ou plutôt $\frac{1'}{\sin\lambda}$, et représentent par conséquent l'arc de 1′ dans les régions où $\lambda = 90°, 80°, 70°, \ldots$. Pour avoir la vraie longueur d'une ligne *ed* tracée sur la Carte par la colatitude moyenne de 60° par exemple, on prendra pour unité la droite allant de A à 60° sur la figure 68, et on la portera sur *ed* autant de fois qu'elle peut y être contenue. Ce n'est rien de plus que le quartier de réduction décrit plus haut; cet instrument donnera donc à vue le résultat.

Les cercles de la sphère seraient représentés sur cette Carte par des courbes compliquées. Un grand cercle peu incliné sur l'équateur y devient une sinusoïde presque exacte. Si l'inclinaison augmente, la forme sinusoïdale persiste, mais en s'altérant de plus en plus. Lorsque le cercle passe par les pôles, il est représenté sur la Carte par deux droites. Quant aux petits cercles, s'ils sont très petits, ils ont une forme à peu près circulaire sur la Carte; mais plus ils sont grands et plus ils se déforment; ils deviennent une courbe à branches infinies lorsque le petit cercle considéré atteint le pôle. Cette étude étant sans intérêt pour la navigation, nous la laisserons de côté. Rien de plus simple d'ailleurs, si l'on avait, par impossible, un cercle à représenter sur une Carte marine, que d'en relever les coordonnées sur une sphère ou une projection stéréographique et de les reporter sur cette Carte.

Nous reviendrons, dans la dernière Partie, sur la question des Cartes à l'occasion des relèvements au compas de points terrestres en vue.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES

A LA MER.

CHAPITRE XXVII.

PROBLÈME GÉNÉRAL; CIRCONSTANCES FAVORABLES.

Les inconnues du problème de la navigation sont les coordonnées géographiques du lieu du navire à un instant donné, λ et L, et l'azimut V de la route.

L'estime fournit, à tout instant, par le loch, la boussole et les Cartes, des valeurs plus ou moins approchées de ces éléments. Il s'agit maintenant d'en obtenir les valeurs exactes par des observations astronomiques.

Comme $V = (A) + A$, en désignant par (A) la différence d'azimut entre l'axe du navire et un astre connu, et par A l'azimut astronomique de l'astre lui-même, la détermination de l'angle de route se trouve ramenée à celle de l'azimut d'un astre connu à un instant donné.

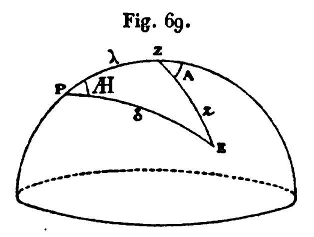
Comme $L = H - H_p$, heure du lieu moins heure de Paris au même instant, il y a en réalité quatre inconnues :

$$\lambda,\ H,\ A \text{ et } H_p.$$

La détermination astronomique de H_p est un problème à part dont nous nous occuperons plus loin. Pour le moment, nous supposerons que les chronomètres du bord donnent

exactement cette heure (1). Dès lors les inconnues se réduisent à λ, H, A.

Fig. 69.



En mer, on n'a que des distances zénithales à mesurer pour résoudre ce problème; mais les formules de transformation qui servent à passer des coordonnées z et A d'un astre connu aux coordonnées δ et Æ, par l'intermédiaire de l'angle λ compris entre les axes des deux systèmes, nous offrent toutes les relations nécessaires.

Ces formules, dont nous nous servirons constamment, sont (2)

$$(a) \qquad \cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos Æ,$$

$$(b) \qquad \sin z \cos A = -\sin\lambda \cos\delta + \cos\lambda \sin\delta \cos Æ,$$

$$(c) \qquad \sin z \sin A = \sin\delta \sin Æ.$$

---

(1) Une erreur des chronomètres chargés de conserver l'heure de Paris pendant toute la traversée a deux effets. Le premier est d'altérer les coordonnées des astres que l'on tire de la *Connaissance des Temps*. Cet effet est fort peu sensible (sauf pour la Lune), à moins que l'erreur des chronomètres ne soit considérable. Le second est de vicier l'angle de route déduit du point observé. Celui-là est d'autant plus marqué que l'on approche plus du but. C'est donc surtout à ce moment qu'il faut se préoccuper de l'erreur des chronomètres. L'obligation d'abréger la route et d'éviter les risques de toute sorte, autant que cela est humainement possible, impose l'usage régulier des distances lunaires, seul moyen qui existe de contrôler l'élément fondamental des longitudes.

(2) Notons encore, mais pour la discussion seulement, les relations analogues

$$(d) \qquad \sin z \cos E = \sin\delta \cos\lambda - \cos\delta \sin\lambda \cos Æ,$$

$$(e) \qquad \sin z \sin E = \sin\lambda \sin Æ.$$

L'angle à l'astre E porte le nom d'*angle de position*. Il ne dépasse pas 180°. Toutes ces formules appartiennent aussi au triangle sphérique PZE, pourvu qu'on y change au préalable le signe de cos A et qu'on limite A et Æ à 180°.

L'angle horaire $\mathcal{H}$ du Soleil n'est autre chose que l'heure vraie, d'où l'on déduit l'heure moyenne en ajoutant l'équation du temps à l'heure vraie.

Ce qui complique un peu le problème astronomique, c'est que le navire est en marche et que les coordonnées de l'observateur λ et L varient incessamment. Lorsqu'on veut combiner ensemble plusieurs observations successives, il faut donc tenir compte de ces variations; l'estime nous les fournit avec une exactitude passable, pourvu que l'intervalle desdites observations soit petit. Désignons par λ et L les coordonnées du navire à l'instant H_p, par $\Delta\lambda$ et ΔL les variations de ces coordonnées pour l'intervalle de temps $H'_p - H_p$; nous aurons à l'heure H'_p, pour valeurs des coordonnées,

$$\lambda + \Delta\lambda, \quad L + \Delta\lambda.$$

Cette dernière variation interviendra dans $\mathcal{H}$ si l'on écrit

$$\mathcal{H} = H_p + L - e \text{ au lieu de } H - e.$$

Cela posé, comme l'équation (a) ne contient que deux inconnues λ et $\mathcal{H}$, ou λ et H, ou encore λ et L, pour déterminer ces inconnues il suffira de mesurer les distances zénithales du Soleil z et z' à deux instants H_p et H'_p, car, en désignant par δ et δ' les distances polaires du Soleil à ces deux époques, par e et e' les valeurs de l'équation du temps, et en posant

$$\alpha = \mathcal{H}' - \mathcal{H} = H' - e' - (H - e) = H'_p + L + \Delta L - e' - (H_p + L - e),$$

expression d'où l'inconnue L disparaît, nous aurons les deux équations

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos\mathcal{H},$$
$$\cos z' = \cos(\lambda + \Delta\lambda) \cos\delta' + \sin(\lambda + \Delta\lambda) \sin\delta' \cos(\mathcal{H} + \alpha),$$

qui ne contiennent que les deux inconnues λ et $\mathcal{H} = H - e$, correspondantes à l'heure H_p.

C'est là le problème général de la navigation connu sous le nom de *problème de Douwes*. Il s'agit, comme on le voit, de déterminer en bloc l'heure du lieu et la colatitude, ou H et λ, au moyen de deux mesures de z effectuées à des instants quel-

conques. Outre les données z et z' de l'observation, que nous avons supposées ici corrigées au préalable de la réfraction et de la parallaxe, elles exigent les valeurs de δ et de e aux époques H_p et H'_p. La *Connaissance des Temps* fournit ces valeurs avec toute la précision désirable, quand bien même les chronomètres du bord ne donneraient l'heure de Paris qu'à 4^m ou 5^m près. Cela résulte de ce que ces deux éléments varient fort peu avec le temps. La plus forte variation horaire de δ pour le Soleil, par exemple, est de $1'$. Une erreur de $\pm 5^m$ sur l'heure de Paris ne produirait donc, dans le calcul de δ, qu'une erreur de $\frac{5}{60}$ de minute ou de $5''$. Il en serait de même de l'équation du temps.

Nous traiterons plus loin le problème de Douwes dans toute sa généralité, c'est-à-dire pour deux observations faites à des heures quelconques; mais, dans la pratique, on recherche les circonstances particulières où les erreurs inévitables de l'observation ont le moins d'influence sur les résultats du calcul, et l'on n'a recours à la solution générale que si ces circonstances favorables n'ont pu être mises à profit.

Recherche des circonstances favorables.

Différentions l'équation (a) par rapport à tous les éléments qu'elle renferme :

$$(f)\quad \left\{\begin{aligned} -\sin z\,dz = {} & (-\sin\lambda\cos\delta + \cos\lambda\sin\delta\cos Æ)\,d\lambda \\ & + (-\cos\lambda\sin\delta + \sin\lambda\cos\delta\cos Æ)\,d\delta \\ & - \sin\lambda\sin\delta\sin Æ\,dÆ. \end{aligned}\right.$$

En tenant compte de (b), de (c) et de (e), cette relation peut s'écrire, après avoir supprimé le facteur $\sin z$,

$$(g)\qquad -dz = \cos A\,d\lambda + \cos E\,d\delta\,\sin\lambda - \sin A\,dÆ.$$

L'erreur à craindre sur δ étant nulle ou insensible, (g) se réduit à

$$dz = -\cos A\,d\lambda + \sin\lambda\sin A\,dÆ.$$

Considérons d'abord l'inconnue λ, et divisons les deux

membres de cette équation par $\cos A$, ce qui est permis, à moins que A ne soit de 90° ou de 270°; il viendra, en donnant aux différentielles la signification d'erreurs probables,

$$d\lambda = \pm \sqrt{\left(\frac{dz}{\cos A}\right)^2 + (\operatorname{tang} A \sin\lambda \, d\text{Æ})^2}.$$

On voit par là l'influence que des erreurs accidentelles dz, dÆ, commises dans la mesure de z ou sur l'heure, exercent sur la détermination de λ. Cette influence sera minimum pour $A = 0°$ ou $180°$, c'est-à-dire si l'astre est observé dans le méridien, passage supérieur ou inférieur. Dans ce cas, l'erreur commise sur l'heure est sans influence et celle sur z se réduit à dz. Très près du méridien, la première, ayant pour facteur $\operatorname{tang} A$, qui est alors très petit, est encore fort peu sensible; la seconde, ayant pour diviseur $\cos A$, est à peine supérieure à dz. C'est donc dans le méridien, ou très près du méridien, qu'il faut observer pour obtenir λ avec le plus de précision possible.

On s'en rend compte d'une autre manière. Faites $A = 0$ et par suite Æ $= 0$ dans les formules (a) et (b); vous aurez

$$\cos z = \cos(\delta - \lambda),$$
$$\sin z = \sin(\delta - \lambda),$$

par conséquent

$$z = \delta - \lambda,$$

formule indépendante de l'heure. Il suffit de mesurer z à l'instant où l'astre passe au méridien pour obtenir la colatitude λ sans avoir à se préoccuper de l'heure, et une erreur dz commise sur z n'aura d'autre influence que de se reporter sur λ.

De là la pratique constante des navigateurs, qui attendent l'heure de midi pour observer le Soleil, afin d'obtenir la colatitude.

Considérons en second lieu la détermination de l'heure, c'est-à-dire de l'angle horaire Æ. En divisant l'équation différentielle par $\sin A$, ce qui est permis tant que A diffère de 0° ou

de 180°, et en passant des différentielles aux erreurs probables, on a

$$\sin\lambda\, d\text{Æ} = \pm\sqrt{\left(\frac{dz}{\sin A}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{\tang A}\right)^2}.$$

Le minimum a lieu pour $A = 90°$ ou $270°$. Si donc on observe à 90° à gauche ou à droite du méridien, une erreur $d\lambda$ sur la colatitude sera sans influence sur la détermination de l'heure, et une erreur dz, sur la distance zénithale mesurée, se reportera sur Æ sans autre amplification que par l'inévitable diviseur $\sin\lambda$.

Ainsi, pour déterminer l'heure sans avoir à se préoccuper d'une erreur possible sur λ, il faut observer par les azimuts de 90° ou de 270°, ou du moins près de ces verticaux. De là la pratique constante des navigateurs, qui choisissent les heures du matin ou du soir, lorsque le Soleil est à 90° à peu près du méridien, pour déterminer un angle horaire et en déduire l'heure du bord.

Nous n'avons parlé jusqu'ici que du Soleil; les mêmes conclusions auraient lieu pour la Lune, les planètes et les étoiles.

Toutefois, quand il s'agit d'obtenir l'heure par les étoiles, il faut éviter de prendre l'astre observé près du pôle. En effet, en laissant de côté $d\lambda$, l'équation différentielle devient, en tenant compte de la relation (e),

$$d\text{Æ} = \frac{dz}{\sin\delta \sin E}.$$

Il faut donc, pour que l'erreur dz de la distance zénithale observée ait le moins d'influence, que δ soit voisin de 90°. C'est pourquoi les étoiles voisines de l'équateur sont appelées parfois *étoiles horaires*.

En résumé, on voit qu'il y a tout avantage à déterminer λ et H ou L séparément, λ par une observation méridienne du Soleil, H par une observation faite autant que possible à 90° du méridien. L'estime permet de calculer d'avance ces instants avec une exactitude plus que suffisante pour se préparer à l'observation. En été, sur notre hémisphère, le Soleil se trouve au

nord de l'équateur et son parallèle coupe toujours quelque part le cercle azimutal de 270° ou de 90°; la prescription précédente pourra donc être remplie. En hiver il en est autrement; le parallèle du Soleil est sous l'équateur et ne coupe pas les deux cercles azimutaux précédents au-dessus de l'horizon; on devra donc se contenter d'observer le plus près possible de l'azimut de 90°. Sur l'hémisphère austral, les choses sont à l'inverse. De là la règle : On ne peut observer un astre par 90° d'azimut que si l'astre et l'observateur se trouvent dans des hémisphères céleste et terrestre de même nom.

CHAPITRE XXVIII.

PRATIQUE JOURNALIÈRE; HEURE ET COLATITUDE.

Observation de midi.

Dans la pratique, on observe la distance zénithale du Soleil, non pas au moment précis de son passage par le méridien continuellement variable du navire, mais à l'instant de sa culmination, c'est-à-dire à celui où il atteint sa plus grande hauteur. Alors le Soleil cesse de monter; il se meut pendant quelques instants parallèlement à l'horizon avant de commencer à descendre. L'observateur, ayant mis d'avance en contact l'image doublement réfléchie du Soleil avec l'horizon de la mer, doit manœuvrer la vis de rappel de son sextant de manière à maintenir ce contact pendant que le Soleil s'élève; il est donc averti de l'instant de la culmination par ce fait seul qu'il n'a plus aucun mouvement à faire pour maintenir les deux images au contact, et c'est le moment qu'il saisit pour faire la lecture de la hauteur angulaire.

A la vérité, cet instant n'est pas exactement celui du passage du Soleil au méridien, et la relation $\lambda = \delta - z_m$ ne lui est pas rigoureusement applicable ; mais l'erreur est assez petite, comme nous le verrons plus loin. Il suffira donc, pour obtenir λ, de tirer de la *Connaissance des Temps* la valeur de δ qui répond à l'heure de l'observation, qu'on aura eu soin de noter. Voici un exemple. Le 10 avril 1878, à $2^h 3^m 40^s$, temps moyen de Paris, on a observé la culmination du Soleil et obtenu, toutes réductions faites pour la réfraction, la parallaxe et le demi-diamètre,

	$z = 37°.11',7$
La *Connaissance des Temps* donne pour cet instant..	$\delta = 81.57,8$
d'où..	$\lambda = 44.46,1$

Le grand avantage de cette simple observation est d'être indépendante de l'estime. Le seul élément étranger à l'observation est l'heure de Paris qui nous a servi à calculer la valeur de δ. On a vu qu'il n'y a rien à craindre de ce côté. Nous examinerons de plus près ces résultats.

Détails relatifs aux climats.

Plusieurs cas se présentent suivant les climats ; mais il n'y a jamais d'ambiguïté, pourvu qu'on note si la culmination a été observée au sud ou au nord du zénith, c'est-à-dire par $A = 0$ ou $A = 180°$, au-dessus ou au-dessous de la ligne des pôles, c'est-à-dire par $\text{Æ} = 0$ ou $\text{Æ} = 180°$: les deux équations (a) et (b), d'où z doit ressortir positif et $< 180°$, lèvent tous les doutes. Dans l'exemple précédent, l'observation ayant été faite au sud du zénith et au-dessus de la ligne des pôles, on avait $A = 0$, $\text{Æ} = 0$. Les équations (a) et (b) se réduisent à

$$\cos z_m = \cos(\delta - \lambda),$$
$$\sin z_m = \sin(\delta - \lambda);$$

donc $z_m = \delta - \lambda$.

Si l'observation avait été faite au nord du zénith et au-dessus

de la ligne des pôles, nous aurions $A = 180°$, $Æ = 0$, par suite

$$\cos z_m = \cos(\delta - \lambda),$$
$$-\sin z_m = \sin(\delta - \lambda);$$

donc $z_m = \lambda - \delta$.

De même, si l'observation avait été faite au nord du zénith et au-dessous du pôle, on aurait $A = 180°$, $Æ = 180°$, et par suite $z_m = \delta + \lambda$. Enfin, si le Soleil avait été observé au sud et au-dessous du pôle par $A = 0$, $Æ = 180°$, on aurait

$$z_m = 360° - (\delta + \lambda).$$

Par exemple, le 30 novembre,

$z_m =$	30°.19′
δ =	111.41
Somme	192. 0
	360. 0
$\lambda =$	168. 0

Détermination de l'heure.

La colatitude ayant été déterminée à midi, pour l'obtenir à un autre instant il faut lui ajouter le chemin parcouru dans l'intervalle dans le sens du méridien. Dès lors, pour obtenir à cet instant l'heure du lieu, il suffira de mesurer une seconde distance zénithale du Soleil et d'en porter la valeur, ainsi que celle de la colatitude, dans l'équation (a). Mais, plus on s'écarte de l'heure de midi et plus λ devient incertain. Pour éviter l'influence de l'erreur primitive de λ augmentée de celle de l'estime du chemin parcouru, on choisira l'instant où le Soleil est le plus près possible des azimuts de 90° ou de 270°, sans être pourtant trop bas.

Le calcul de l'équation (a), quand il s'agit d'en déduire $Æ$, peut se faire de trois manières : 1° directement, en passant des logarithmes aux nombres et des nombres aux logarithmes; 2° après avoir mis cette équation sous la forme

$$\cos z = \cos(\delta - \lambda) - 2\sin\lambda\sin\delta\sin^2\tfrac{1}{2}Æ,$$

on emploiera les sinus verses, ce qui donne

$$\sigma z - \sigma(\delta - \lambda) = \sin\lambda \sin\delta\, \sigma Æ ;$$

3° enfin on rendra l'avant-dernière formule calculable par logarithmes, et, en écrivant z_m pour $\delta - \lambda$, on aura

$$\sin\tfrac{1}{2}(z - z_m)\sin\tfrac{1}{2}(z + z_m) = \sin\lambda \sin\delta \sin^2\tfrac{1}{2}Æ.$$

Exemple. — *Le* 10 *avril* 1878, *vers* 7^h *du matin et à* 21^h0^m *des chronomètres, on a observé le Soleil par* $74°39',1$, *toutes réductions faites : on demande l'heure du lieu ou la correction de la longitude estimée.*

L'estime donne à cette heure

$$\lambda = 43°56',00,$$
$$L = 21^h56^m56^s.$$

La *Connaissance des Temps* donne

$$\delta = 82°2',5,$$
$$e = +1^m22^s,0.$$

1° *Calcul direct de l'équation* (*a*).

log cos λ...	9,85742	log sin λ...	9,84125	cos z.......	0,26468
log cos δ...	9,14130	log sin δ...	9,99580	cos λ cos δ..	0,09971
	8,99872		9,83705	Diff........	0,16497
		log diff....	9,21742		
		log cos Æ.	9,38037	Æ = 283°54′ = $18^h55^m34^s$	

2° *Calcul par les sinus verses.*

δ − λ = 38°6′,5	σz........	0,73521	log diff....	9,71780		
	σ(δ−λ)..	0,21315	C' log sin λ.	0,15875		
	Diff.......	0,52216	C' log sin δ.	0,00420		
			σÆ......	9,88075	Æ = $18^h55^m34^s$	

3° *Calcul par la formule logarithmique.*

z........	74°.39′,1	$\log\sin\frac{z+z_m}{2}$.	9,92050	$\log\sin\frac{1}{2}Æ$.	9,78986
$\delta-\lambda$.....	38. 6,5	$\log\sin\frac{z-z_m}{2}$.	9,49627	$\frac{1}{2}Æ$.......	141°57′
	112.45,6	C^t log sin λ....	0,15875	$Æ$........	283°54′
	36.32,6	C^t log sin δ....	0,00420		18^{h}55^{m}34^s
$\frac{1}{2}(z+z_m)$.	56.22,8	$\log\sin^2\frac{1}{2}Æ$...	9,57972		
$\frac{1}{2}(z-z_m)$.	18.16,3				

Voici maintenant le calcul de l'heure ou de la longitude :

	h m s
H_φ......	18.55.34
e.......	+ 0. 1.22
H..... .	18.56.56
H_p......	21. 0. 0
L.......	21.56.56

Degré de précision du résultat.

Pour appliquer ici la formule

$$dÆ = \pm \frac{1}{\sin\lambda}\sqrt{\left(\frac{dz}{\sin A}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{\text{tang} A}\right)^2},$$

il faut calculer l'azimut, dont nous aurons d'ailleurs besoin tout à l'heure pour déterminer l'angle de route

log sin δ.........	9,99580		
log sin $Æ$.......	9,98710n		
C^t log sin z.......	0,01578		
log sin A.........	9,99868n	sin A.....	= − 1,0
A..............	274°28′		
log tang A........	1,10726n	tang A....	= −12,8

Portons dz à $\pm 0',2$; quant à $d\lambda$, on a dû transporter à 21^{h}0^m la colatitude déterminée cinq heures plus tard, à 2^h, en retranchant le mouvement du navire en λ, c'est-à-dire, en supposant que le changement horaire en λ soit $+10'$, cinq fois $10'$ ou $50'$. Or, l'incertitude sur la route étant de $\frac{1}{20}$, celle de la valeur que

nous venons d'employer pour λ sera de $\pm 2',5$ et même un peu plus, en tenant compte de l'erreur probable de la colatitude à midi. Nous aurons donc

$$d\text{Æ} = \pm \frac{1}{\sin\lambda}\sqrt{(0',2)^2 + \left(\frac{2',5}{12.8}\right)^2} = \pm \frac{0',3}{\sin\lambda} = \pm \frac{0',3}{0,7},$$

ou $0',4 = \pm 1^s,6$. Ainsi, en choisissant un instant favorable, on déterminera l'heure à une ou deux secondes près, malgré l'incertitude qui pèse sur λ.

Néanmoins, lorsqu'il s'agira de faire le point à midi, il faudra ajouter à la longitude ainsi obtenue le matin l'espace parcouru en longitude par le navire, c'est-à-dire, en supposant que le changement horaire en longitude soit $+46^s$, cinq fois 46^s ou 230^s, dont l'incertitude est de $\pm 11^s,5$. Pour évaluer celle du point marqué sur la Carte, il faudra exprimer $11^s,5$ en minutes et réduire en arc de grand cercle en multipliant par $\sin\lambda$ ou $0,7$. Ainsi l'incertitude dans le sens du parallèle sera $\pm 2'$ et dans le sens du méridien $\pm 0',2$, pourvu qu'on ait corrigé l'observation de la culmination comme on le verra plus bas.

On voit que la nécessité d'emprunter à l'estime les éléments de réduction des coordonnées observées, pour ramener celles-ci à la même heure, conduit à une erreur probable bien plus grande que celle des observations astronomiques prises à part. Il peut donc y avoir avantage, comme nous le dirons plus loin, à déterminer l'heure dans des conditions astronomiquement moins favorables, mais beaucoup plus près de midi, heure pour laquelle on fait ordinairement le point chaque jour.

Dans l'appréciation du degré d'exactitude du point observé, il ne faut jamais oublier de tenir compte de l'erreur à craindre sur l'heure de Paris fournie par les chronomètres. Cette erreur, croissant généralement avec le temps, pourrait vicier profondément le point observé si l'on n'avait recours, de temps en temps, à l'observation des distances lunaires, qui seule permet de contrôler les indications de ces instruments délicats.

CHAPITRE XXIX.

PRATIQUE JOURNALIÈRE. — ORIENTATION.

Angle de route.

L'angle de route V est $M + D + d + c$, expression où M est lui-même donné par $M' + \delta$. La dérive d due au vent doit être mesurée directement; nous avons vu comment on tient compte de la dérive c due aux courants quand les Cartes en font connaître la vitesse et la direction. Il reste à contrôler δ et D, c'est-à-dire les éléments magnétiques d'où l'on conclut l'azimut astronomique $M' + \delta + D$ de l'axe du navire.

Pour cela il suffit de relever au compas l'azimut magnétique du Soleil à un instant quelconque et de le comparer avec l'azimut astronomique du Soleil, que l'on calculera, pour cet instant-là, par les relations (b) et (c).

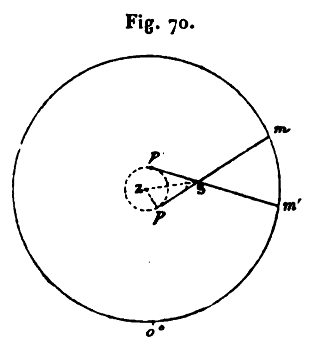
Il y a donc ici deux points à distinguer : 1° l'opération du relèvement au compas étalon; 2° le calcul de l'azimut astronomique de l'astre observé.

1° Relèvement à la boussole.

Ici la boussole, munie d'une alidade pouvant tourner autour de l'axe vertical de l'instrument et parfois d'un cercle azimutal gradué de minute en minute, fonctionne comme un véritable théodolite, sauf que l'aiguille fournit l'origine des arcs mesurés en maintenant la rose dans une position constante. La seule condition géométrique à remplir est que l'axe de l'instrument soit bien vertical et que le plan de la graduation, c'est-à-dire la rose, soit bien horizontal, ce que l'on obtient à l'aide d'une glissière ajustée avec soin selon la colatitude magnétique.

En mer, le tangage et le roulis feraient décrire à l'axe de a boussole un cône autour de la verticale si l'on n'y remédiait en donnant à la cuve une suspension à la Cardan. Il faut alors que les axes de cette suspension se coupent bien au centre de la rose et que la suspension elle-même soit parfaitement libre; aussi les couteaux valent-ils mieux que les tourillons pour l'exactitude des relèvements. Malgré toutes ces précautions, l'axe de la boussole de relèvement n'est jamais bien vertical, et il résulte de cette petite déviation inévitable des erreurs dont il est aisé d'apprécier l'importance. Projetons le ciel sur le plan

Fig. 70.



de l'horizon, et soient Z le zénith, p, p' deux positions du pôle géométrique de la boussole circulant autour du point Z. Dans la position p, l'azimut mesuré sur l'instrument aboutit à la division m; dans la position p', il aboutit à la division m'. Le demi-angle d'écart dépend du triangle sphérique Z S p, qui donne

$$\sin ZSp = \frac{\sin Zp}{\sin ZS}.$$

Or ZS est la distance zénithale de l'astre; l'erreur du relèvement due aux oscillations du navire sera donc d'autant plus grande que la distance zénithale de l'astre sera plus petite. Il en résulte que, pour obtenir un bon relèvement d'un astre, il faut éviter que cet astre soit trop élevé au-dessus de l'horizon.

Si l'astre observé est le Soleil, on observe successivement l'azimut des deux bords en notant l'heure. La moyenne de ces

deux observations donnera sensiblement l'azimut magnétique du centre à l'instant marqué par la moyenne des heures.

Soit A′ cet azimut mesuré à l'heure H ou H_p ; il sera évidemment affecté des erreurs actuelles de la boussole, tout comme le cap magnétique apparent M′ du navire ; on aura donc pour l'azimut vrai du Soleil, au même instant H_p,

$$A = A' + \delta + D,$$

δ, qu'on ne risque pas de confondre avec la distance polaire δ du Soleil employée plus bas, étant ici la déviation relative au cap M′. Cette équation donnera $\delta + D$ quand on aura calculé A.

2° Calcul de l'azimut astronomique.

Soient H_p l'heure de l'observation précédente, (L, λ) le point estimé, δ, e les éléments fournis par la *Connaissance des Temps* pour l'heure H_p ; on aura Æ par la formule

$$Æ \text{ ou } H_v = H_p + L - e,$$

et l'on calculera l'azimut A par les relations (b) et (c). En éliminant entre elles $\sin z$, il vient

$$\cot A \sin Æ = -\sin\lambda \cot\delta + \cos\lambda \cos Æ.$$

Exemble. — *Le* 10 *avril, à* $7^h 42^m$ *du soir, temps moyen de Paris, on a relevé le Soleil à la boussole par* 132°55′ *: déterminer la déviation.*

L'estime donne à cet instant

$$\lambda = 45°43', \quad L = 22^h 5^m 8^s.$$

La *Connaissance des Temps* donne

$$e = 1^m 14^s,7, \quad \delta = 81°52',6.$$

	h m s						
H_p...	7.42. 0	sin λ.	9,855	cos λ...	9,844	2° nombre.	0,0431
L....	22. 5. 8	cot δ.	9,154	cos Æ.	8,790	— 1er nombre.	0,1021
H....	5.47. 8		9,009		8,634		—0,0590
e....	0. 1.15			A.....	93°22′	log diff.....	8,771 n
H_v...	5.45.53			A′....	132°55′	log sin Æ...	9,999
Æ...	86°28′			D + δ.	— 39°33′	log cot A....	8,770 n

Par 46° de colatitude et 331° de longitude on trouve, à l'aide des Cartes magnétiques, $D = -30°$. Ainsi $\delta = -9°33'$ pour le cap actuel du navire, ce qui permet de contrôler, pour ce cap, la Table ou l'épure des déviations.

Le plus simple, comme pratique journalière, est de prendre un relèvement du Soleil au compas étalon chaque fois que l'on en mesure la distance zénithale pour avoir l'heure. Alors on calcule A par l'équation (*c*), $\sin z \sin A = \sin\delta \sin Æ$, et, si l'on était incertain sur le quadrant où l'on doit prendre A, on consulterait l'équation (*b*), qui donnerait le signe de cos A.

Circonstances favorables à la détermination de l'azimut.

En différentiant l'équation précédente par rapport à A, λ et Æ, il vient

$$-\frac{dA}{\sin^2 A}\sin Æ + \cot A \cos Æ\, dÆ = -(\cos\lambda \cot\delta + \sin\lambda \cos Æ)\,d\lambda \\ -\cos\lambda \sin Æ\, dÆ.$$

Multipliez par $\sin A \sin\delta$; vous aurez

$$\frac{dA \sin Æ \sin\delta}{\sin A} = (\cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos Æ)\sin A\, d\lambda \\ + (\cos A \cos Æ + \sin A \sin Æ \cos\lambda)\sin\delta\, dÆ,$$

ce qui revient à

$$\sin z\, dA = \cos z \sin A\, d\lambda + \cos E \sin\delta\, dÆ.$$

S'il s'agissait d'un azimut de haute précision, comme en Géodésie, cette formule indique que, pour éviter l'influence d'une erreur sur la colatitude, l'astre doit être pris près du méridien, que, pour éviter l'influence d'une erreur sur l'heure, δ doit être petit et E voisin de 90°. Ces circonstances favorables se trouvent réunies pour la polaire à l'instant de son plus grand écart à droite ou à gauche du méridien. Mais en mer on n'a pas besoin des azimuts à la seconde ou à la minute près; il suffit donc de retenir, de la formule précédente, que z ne doit pas être trop petit. C'est la même règle que pour les relèvements.

Changement de route.

Lorsque la position du navire a été déterminée astronomiquement et portée sur la Carte, on a le nouvel angle de route en joignant ce point au lieu d'arrivée par une ligne droite et en mesurant, au rapporteur, l'azimut loxodromique de cette droite. Si cet angle différait notablement de l'ancien, les déterminations relatives à ce dernier, la déviation en particulier, prendraient une autre valeur. Il en serait de même de la dérive due aux vents et de la dérive des courants. Il sera donc utile, après avoir mis le cap sur le nouvel angle de route, de vérifier cette direction en mesurant la nouvelle dérive, et surtout en déterminant astronomiquement une seconde fois l'angle $\delta + D$. Il peut même se présenter des cas où, ne pouvant compter sur les éléments magnétiques δ et D, on se trouve dans l'obligation de naviguer entièrement d'après les astres, comme on le faisait jadis avant l'invention de la boussole.

En traînant le loch à la remorque, on se procure un signal terrestre placé juste dans la direction de la route; on mesurera de temps en temps avec le compas étalon la différence d'azimut (A) comprise entre le sommet du loch et le Soleil, et l'on aura, en désignant par A l'azimut du Soleil,

$$A + (A) = V,$$

dérive comprise. Pour changer de route et suivre un autre angle V′, on calcule d'avance l'azimut A′ du Soleil pour une heure H_p. On a donc pour cette même heure $(A') = V' - A'$, et l'on manœuvre de manière à amener, à l'heure H_p, la ligne de remorque à faire sensiblement avec le vertical du Soleil l'angle (A′).

Une grande partie des naufrages étant due, par ce temps de courses rapides et de navires en fer, aux déviations mal connues des compas, on ne saurait disposer de trop de moyens pour les contrôler et même pour les remplacer. Si un navire, au moment d'atterrir, se trouvait condamné à des change-

ments de marche considérables et fréquents, le procédé que l'on vient d'indiquer donnerait à tout instant le vrai cap astronomique du navire, y compris la dérive.

En tout cas, il faut donc considérer comme étant de pratique journalière le relèvement de l'astre observé à l'instant même où l'on prend un angle horaire, et le calcul de l'azimut de l'astre à cet instant-là. La même opération doit être reprise si, par suite du point observé, on est conduit à changer notablement de direction.

CHAPITRE XXX.

OBSERVATIONS CIRCUMMÉRIDIENNES.

Si une circonstance quelconque fait manquer l'observation de midi, on la remplace par une mesure de z prise aussi près que possible du méridien. Alors une connaissance plus ou moins approchée de l'heure du lieu est nécessaire pour tirer λ de l'équation (a), qui contient Æ; mais l'erreur commise sur cette heure influera fort peu sur le résultat, à moins que l'observation ne soit faite par trop loin du méridien.

La colatitude λ entrant sous deux formes dans l'équation

$$(a) \qquad \cos z = \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos Æ,$$

il semble qu'il n'y ait pas d'autre moyen de la résoudre que d'introduire un angle auxiliaire φ par les relations

$$\cos\delta = m\cos\varphi,$$
$$\sin\delta\cos Æ = m\sin\varphi,$$

ce qui permet d'écrire l'équation (a) comme ceci,

$$\cos z = m\cos(\varphi - \lambda),$$

d'où l'on tire λ sans ambiguïté, car l'estime fait toujours connaître dans quel quadrant λ doit être pris. Mais ce procédé, applicable lorsque $Æ$ est très grand, peut être remplacé par un autre beaucoup plus simple lorsque $Æ$ est très petit, et c'est le cas des observations circumméridiennes.

La distance zénithale z, mesurée hors du méridien, sera un peu plus grande que la distance zénithale méridienne z_m, d'où l'on conclurait λ par la formule $\lambda = \delta - z_m$. La différence $z - z_m$ porte le nom de *réduction au méridien;* nous la désignerons par r. En remplaçant $\cos Æ$ par $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}Æ$, l'équation (a) devient

$$\cos z = \cos(\delta - \lambda) - 2\sin\lambda\sin\delta\sin^2\tfrac{1}{2}Æ.$$

Écrivons z_m au lieu de $\delta - \lambda$ et remplaçons la différence des deux cosinus de z et de z_m par le produit de deux sinus; nous aurons la formule rigoureuse

$$(a') \qquad \sin\tfrac{1}{2}(z - z_m) = \sin\tfrac{1}{2}r = \frac{\sin\lambda\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}(z + z_m)}\sin^2\tfrac{1}{2}Æ.$$

Cette formule peut être mise, sans erreur sensible, tant que r ne dépasse pas 2° ou 3° (¹), sous la forme

$$z - z_m = r = 3438'\frac{\sin\lambda\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}(z + z_m)}2\sin^2\tfrac{1}{2}Æ.$$

Les inconnues λ et z_m qui figurent dans cette expression peuvent être remplacées, dans un premier calcul, z_m par z et λ par la colatitude de l'estime. On peut même laisser de côté la colatitude estimée et remplacer λ par $\delta - z$. D'ailleurs le facteur $2\sin^2\frac{1}{2}Æ$ n'est autre chose que $\sigma Æ$. Voici un exemple :

Le 10 *avril* 1878, *le ciel s'étant découvert une demi-heure après midi, on a observé le Soleil à* $2^h 32^m$, *temps moyen de Paris, par* $z = 37^\circ 44',2$, *toutes réductions faites.*

La longitude estimée est $22^h 1^m 10^s$; *la* Connaissance des

(¹) L'erreur commise en remplaçant ainsi le sinus par l'arc est de 0',003 pour 1°, de 0',025 pour 2° et de 0',084 pour 3°.

Temps *donne, pour* $2^h 32^m$, $\delta = 81°57',4$, $e = +1^m 18^s$. *Il s'agit de calculer* λ *sans se servir du* λ *estimé.*

Posons d'abord $z_m = z = 37°44'$. On en tire $\lambda = 44°13'$, valeur assurément très erronée. Le calcul se fait ainsi :

	h m s				° ′
H_p......	2.32. 0	log sin λ......	9,8484	r......	0.37,9
L.......	22. 1.10	log sin δ.....	9,9957	λ prov.	44.13,0
H.......	0.33.10	C^t log sin z_m..	0,2133	λ......	44.50,9
e........	0. 1.18	log 3438.....	3,5363		
$Æ = H_v$.	0.31.52	log 2 sin$^2 \frac{1}{2}$ Æ.	7,9847		
		log r........	1,5784		

On pourrait se contenter de ce résultat. Si l'on veut calculer plus rigoureusement, on recommencera le calcul avec cette valeur de λ. On en déduit $z_m = 37°6',5$ et $\frac{1}{2}(z + z_m) = 37°25',4$. Le reste du calcul sera :

			° ′
log 2 sin δ sin$^2 \frac{1}{2}$ Æ.3438′.......	1,5167	r.......	0.38,1
log sin λ.....................	9,8483	z.......	37.44,2
C^t log sin $\frac{1}{2}(z + z_m)$...........	0,2163	z_m.....	37. 6,1
log r.......................	1,5813	δ.......	81.57,4
		λ.......	44.51,3

Ainsi la colatitude exacte est $44°51',3$, sauf l'erreur provenant de la longitude estimée ou de l'heure locale H. Pour apprécier cette influence, différentions logarithmiquement la valeur de r :

$$\frac{dr}{r} = 2\,\frac{d\frac{1}{2}Æ}{\tang\frac{1}{2}Æ} = \frac{2\,dÆ}{Æ} \quad \text{sensiblement.}$$

Ici $Æ = 478'$ et $r = 37',9$; on aura donc

$$dr = \frac{75,8}{478}\,dÆ.$$

Si l'erreur sur l'heure était de 1^m, ou de $15'$ sur Æ, l'erreur résultante sur la colatitude serait de $2',4$.

Plus près du méridien, l'erreur serait moindre (¹). Suppo-

(¹) On voit aisément pourquoi : r croît proportionnellement au carré de

sons que le même jour on ait trouvé, à $2^h 12^m$, $z = 37°15',5$: la longitude étant $22^h 1^m 41^s$, et $\delta = 81°57',7$, on aura, par le même calcul, sans qu'il soit besoin cette fois d'une deuxième approximation, $r = 5',8$. On en conclut $\lambda = 44°48'$. Ici l'angle horaire est de $12^m 23^s = 186'$ à peu près, et

$$dr = \frac{11,6}{186} d\text{Æ}.$$

Pour une erreur de 1^m sur l'heure, l'erreur de la colatitude ne serait que de $0',9$.

Mais il y a ici une remarque importante à faire : $\sin \text{Æ}$ change de signe de part et d'autre du méridien; il en sera donc de même de dr. Par suite, si l'on fait deux observations à égale distance du méridien, l'une avant midi, l'autre après midi, les colatitudes conclues différeront très sensiblement si l'heure employée est très inexacte; mais, en prenant la moyenne de ces deux colatitudes, l'erreur disparaîtra; cette moyenne sera tout aussi indépendante de l'heure que si l'observation avait été faite au méridien même. De là la règle pratique très simple : lorsqu'on mesure plusieurs distances zénithales circumméridiennes, on élimine l'effet de l'erreur de la longitude estimée ou de l'heure, si l'on dispose ces observations d'une manière à peu près symétrique par rapport au méridien. Nous verrons plus loin une autre conséquence très importante de la même remarque.

Séries d'observations circumméridiennes.

Par une mer forte, les observations astronomiques deviennent très difficiles et perdent beaucoup de leur précision

---

l'angle Æ, puisque $\sin^2 \frac{1}{2}\text{Æ}$ ou à très peu près $\frac{1}{4}\text{Æ}^2$ entre dans son expression; $dr = 3438' \dfrac{\sin\lambda \sin\delta}{\sin(\delta - \lambda)} \sin \text{Æ} \frac{1}{2} d\text{Æ}$ croît proportionnellement à Æ et change de signe avec $\sin \text{Æ}$. Il n'en serait plus de même pour les très petites distances zénithales. A l'équateur, par exemple, et aux équinoxes, le Soleil passe à midi par le zénith, et l'on a $r = \text{Æ}$, $dr = d\text{Æ}$.

habituelle. Alors on ne se borne pas à une seule mesure de z; on en exécute une série, autant que possible à des intervalles réguliers, et l'on obtient ainsi un résultat plus exact, grâce à la compensation des erreurs accidentelles qui s'opère d'ordinaire dans la moyenne, même pour un assez petit nombre d'observations. Dans ce cas, on calculera la réduction au méridien pour chaque z, puis on prendra la moyenne des λ conclus. Par l'accord ou le désaccord de ces diverses valeurs avec la moyenne, on se fera quelque idée du degré d'exactitude obtenu.

Le 10 avril 1878, la mer étant agitée et l'horizon un peu brumeux, on a fait les observations suivantes pour déterminer la colatitude à midi :

Heure de Paris.	z observé.
h m	° ′
1.54.......	37.14,5
1.56.......	11,5
1.58.......	13,7
2. 0.......	10,9
2. 2.......	11,9
2. 4.......	10,2
2. 6.......	37.12,8

Ces observations sont évidemment affectées d'erreurs accidentelles insolites, mais on ne peut juger de leur désaccord réel qu'après les avoir ramenées au méridien. On calculera l'angle horaire pour la première, et, comme l'intervalle constant est ici 2^m en temps de Paris, on y joindra $1^s,55$ pour tenir compte du mouvement horaire du navire, et l'on ajoutera successivement $2^m\,1^s,6$ au premier angle horaire pour avoir les suivants, bien que cette recherche d'exactitude ne soit pas nécessaire ici. On calculera ensuite le facteur constant $\frac{\sin\lambda\sin\delta}{\sin z_m}$ en prenant δ pour 2^h et l'un des z observés pour z_m. Voici une petite Table des valeurs de $2\sin^2\frac{1}{2}Æ$ ou de $\sigma Æ$ pour faciliter ces calculs; les unités des nombres donnés dans les colonnes des $\sigma Æ$ sont du cinquième ordre décimal.

Æ.	σÆ.	Æ.	σÆ.
m s		m s	
0. 0.....	0	10. 0.....	95
0.20.....	0	10.20.....	102
0.40.....	0	10.40.....	108
1. 0.....	1	11. 0.....	115
1.20.....	2	11.20.....	122
1.40.....	3	11.40.....	130
2. 0.....	4	12. 0.....	137
2.20.....	5	12.20.....	145
2.40.....	7	12.40.....	153
3. 0.....	9	13. 0.....	161
3.20.....	11	13.20.....	169
3.40.....	13	13.40	178
4. 0.....	15	14. 0.. ..	187
4.20.....	18	14.20.....	196
4.40.....	21	14.40.....	205
5. 0.....	24	15. 0.....	214
5.20.....	27	15.20.....	224
5.40.....	31	15.40.....	234
6. 0.....	34	16. 0. ...	244
6.20.....	38	16.20.....	254
6.40.....	42	16.40.....	264
7. 0.....	47	17. 0.....	275
7.20.....	51	17.20.....	286
7.40.....	56	17.40.....	297
8. 0.....	61	18. 0.....	308
8.20.....	66	18.20.....	320
8.40.....	71	18.40.....	332
9. 0.....	77	19. 0.....	343
9.20.....	83	19.20.....	356
9.40.....	89	19.40.....	368

Voici la disposition de ces petits calculs :

		Æ.	σÆ.	r.	z_m.
		m s			° '
logsin λ	9,848	−6.37	0,00041	−1',6	37.13',1
logsin δ	9,996	−4.36	20	−0,8	10,8
C' logsin z_m	0,219	−2.34	6	−0,2	13,5
log 3438'	3,536	−0,33	0	0	10,9
	3,599	+1,29	2	−0,1	11,8
fact	3970',0	+3,31	12	−0,5	9,7
		+5,32	0,00029	−1,1	37.11,7
			0,00110		81,5
			0,00016		Moy. 37.11,6
					δ... 81.57,9
					λ... 44.46,3

Au lieu de calculer individuellement les réductions, il serait un peu plus court de prendre la moyenne des z observés et de lui appliquer la moyenne des corrections qu'on obtiendrait en multipliant 3970′,0 par la moyenne des $\sigma Æ$, c'est-à-dire 0,00016 (¹). On aurait ainsi

Moyenne des z observés................	37°.12′,2
Correction moyenne..................	0. 0,6
z_m.........................	37.11,6

Mais ici l'important n'est pas d'épargner quelques lignes d'un calcul excessivement simple; c'est de se faire une idée du degré de précision obtenu par des mesures exécutées dans des circonstances défavorables. Pour cela, formons le Tableau des écarts ε de chaque z_m comparé à la moyenne, puis la somme des carrés de ces écarts :

ε.	ε^2.
— 1,5	2,25
+ 0,8	0,64
— 1,9	3,61
+ 0,7	0,49
— 0,2	0,04
+ 1,9	3,61
— 0,1	0,01
	10,65

L'erreur moyenne d'une observation, autant qu'on en peut juger par une si courte série, sera $\sqrt{\frac{10,65}{7-1}} = \pm 1',34$ ou 80″. L'erreur moyenne du résultat final sera $\pm \frac{1',34}{\sqrt{7}} = \pm 0',5$. On sait d'ailleurs que l'erreur probable ne sera que les $\frac{2}{3}$ de cette évaluation. Nous ne parlons pas de l'erreur provenant de celle de l'heure ou de la longitude employée, car la disposition des observations permet d'affirmer que la moyenne en est sensiblement exempte.

(¹) Puisque r croît comme le carré de $Æ$, il serait tout à fait inexact de prendre la moyenne des $Æ$ et de calculer la réduction r pour cette moyenne. Cela ne serait permis que si r variait proportionnellement aux $Æ$.

Rappelons ici que le procédé si usuel qui consiste à multiplier les mesures quand elles deviennent difficiles et un peu douteuses ne compense bien que les erreurs accidentelles, les unes par les autres, mais non les erreurs systématiques. Quand l'horizon est voilé par la brume et manque de netteté, l'observateur est conduit, soit à faire empiéter les deux images (horizon et Soleil) l'une sur l'autre, soit au contraire à les laisser un peu écartées. Ces défauts constants ne disparaissent point dans la moyenne, quel que soit le nombre des observations, pas plus que les erreurs systématiques du sextant, celle de la dépression, etc.

Au lieu de la formule que nous venons d'employer, et qui n'est rien de plus qu'une forme de l'équation (a), on a recours parfois au développement en série de ladite formule :

$$\begin{aligned} z - z_m = r = {} & \frac{2\sin\lambda\sin\delta}{\sin(\delta-\lambda)}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathit{AH} \\ & - \frac{2\sin^2\lambda\sin^2\delta}{\sin^2(\delta-\lambda)}\cot(\delta-\lambda)\sin^4\tfrac{1}{2}\mathit{AH} \\ & + \tfrac{4}{3}(1+3)\cot^2(\delta-\lambda)\frac{\sin^3\lambda\sin^3\delta}{\sin^3(\delta-\lambda)}\sin^6\tfrac{1}{2}\mathit{AH} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}$$

mais la formule rigoureuse est par elle-même aussi simple que le premier terme de cette série compliquée, et se prête mieux aux discussions utiles.

CHAPITRE XXXI.

EXTENSION DE LA PRATIQUE JOURNALIÈRE. POINT COMPLET A MIDI.

Examinons maintenant ce système qui consiste à observer le Soleil chaque jour, quand l'état du ciel le permet, à l'instant de sa culmination, pour avoir la colatitude, et le matin ou le

soir pour avoir l'heure du lieu, par suite la longitude si l'heure de Paris est bien connue.

En premier lieu, nous avons déjà fait remarquer que, l'instant de la culmination ne coïncidant pas, en général, avec celui du midi vrai, la formule $\delta = z_m + \lambda$ n'est pas rigoureusement applicable; au z observé à cet instant il faudrait appliquer une petite réduction au méridien pour obtenir le z_m qui entre dans cette formule.

A terre même, où l'observateur est fixe, cette distinction est sensible, à cause de la variation de la distance polaire du Soleil. Si le δ est en voie de décroissance, le Soleil marche peu à peu vers le pôle et par suite se rapproche du zénith. Vers midi, lorsque le Soleil, par l'effet du seul mouvement diurne, devrait cesser de monter, il monte encore pourtant un peu par l'effet de la variation de son δ, et n'atteint qu'un peu après midi sa plus grande hauteur.

A cela s'ajoute le mouvement du navire dans le sens du méridien. S'il marche vers le sud avec une vitesse $v \cos V$ que l'estime fait connaître, c'est comme s'il tournait avec cette vitesse angulaire autour d'un diamètre terrestre perpendiculaire au méridien. Tous les astres lui paraîtront donc se mouvoir autour de ce diamètre avec la même vitesse, mais en sens inverse. Le Soleil, près du méridien, lui paraîtra se rapprocher du pôle ou du zénith avec cette vitesse, et cet effet s'ajoutera à celui de la variation propre au δ de cet astre.

Le mouvement du vaisseau en longitude n'influe pas de cette façon sur la culmination, mais bien sur l'heure du passage au méridien du navire. Si l'observateur marche vers l'ouest, il tourne sur le globe autour de la ligne des pôles avec une vitesse angulaire $\frac{v \sin V}{\sin \lambda}$; les astres lui sembleront tourner en sens inverse avec la même vitesse. Leurs passages au méridien en seront retardés, et cela se comprend, puisque le méridien du navire semble fuir devant eux. Le Soleil, par exemple, dont la vitesse angulaire est en moyenne de 15° ou de 900′ par heure solaire, ne tourne plus qu'avec la vitesse $900' - \frac{v \sin V}{\sin \lambda}$.

Nous n'avons pas eu besoin jusqu'ici de nous occuper de ces effets, parce que l'heure de l'observation était donnée. Il nous a suffi de calculer, par l'estime, à cette heure-là, les coordonnées du navire. Mais si l'heure de l'observation n'est pas donnée, comme pour la culmination, il est nécessaire d'en tenir compte.

Calcul du midi vrai à bord.

Calculons d'abord l'heure du midi vrai à bord, car c'est à cette heure-là qu'il faudrait observer pour avoir la distance zénithale méridienne. Nous n'avons à tenir compte ici que du mouvement du navire en longitude, donné par l'estime, et d'une très petite inégalité du mouvement du Soleil en Æ, donnée par la variation horaire de l'équation du temps. Si le navire ne marchait pas en longitude, on aurait l'heure que les chronomètres de Paris doivent marquer à midi du bord en cherchant dans la *Connaissance des Temps*, par interpolation, l'équation du temps pour la longitude connue de la station. Cette équation, c'est-à-dire l'heure moyenne à midi vrai, donnerait l'heure de Paris à l'instant considéré. Mais, pour tenir compte du mouvement en longitude, on opérera de la manière suivante.

Supposons qu'on ait calculé pour l'heure H_p (avant midi) la longitude L et l'équation du temps e, ainsi que leurs variations horaires $\frac{dL}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, et cherchons à quelle heure $H_p + x$ l'angle horaire du Soleil sera de 24^h. Nous aurons la relation

$$H_p + L - e + \left(1 + \frac{dL}{dt} - \frac{de}{dt}\right)x = 24^h,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{24^h - (H_p + L - e)}{1^h + \frac{dL}{dt} - \frac{de}{dt}},$$

x étant exprimé en fractions d'heure. Cela suppose que la marche du navire en longitude est uniforme; mais on peut

toujours calculer L pour une heure H_p assez rapprochée de midi pour que cette supposition soit admissible.

Par exemple, le 10 avril 1878, on a, à $0^h + x$,

$$L = 21^h 59^m 14^s \quad + 46^s x,$$
$$e = \quad 1^m 19^s,94 - 0^s,68 x,$$

par suite, le dénominateur $1^h + \frac{dL}{dt} - \frac{de}{dt}$ deviendra, en exprimant tout en heures ($1^h = 3600^s$),

$$1 + \frac{46^s,68}{3600}.$$

Le numérateur sera $2^h 2^m 5^s,94$; on en tire

$$x = 2^h 0^m 32^s,0.$$

C'est l'heure que les chronomètres marqueront à l'instant où le Soleil passera au méridien du bord, et c'est aussi l'instant où il faudrait l'observer pour avoir z_m.

Heure de la culmination.

A cet instant $\frac{dz}{dt}$, déduit de l'équation (a), est nul. En se reportant à la première forme de la différentiation donnée plus haut, on voit qu'elle se simplifie beaucoup en remplaçant, dans les coefficients de $d\lambda$ et de $d\delta$, $\cos \mathit{Æ}$ par l'unité, ce qui est permis, car l'angle horaire à l'instant considéré est très petit. Cette relation différentielle devient alors

$$-\sin z \frac{dz}{dt} = \sin(\delta - \lambda)\frac{d\lambda}{dt} - \sin(\delta - \lambda)\frac{d\delta}{dt} - \sin\lambda \sin\delta \sin \mathit{Æ} \frac{d\mathit{Æ}}{dt}.$$

Sin$z$ et $\sin(\delta - \lambda)$ se confondent sensiblement; on aura en divisant par $\sin z$ ou par $\sin(\delta - \lambda)$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{d\lambda - d\delta}{dt} + \frac{\sin\lambda \sin\delta}{\sin(\delta - \lambda)} \sin \mathit{Æ} \frac{d\mathit{Æ}}{dt}.$$

A l'instant de la culmination, $\frac{dz}{dt} = 0$; par suite,

$$Æ = \frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\lambda \sin\delta} \frac{d\lambda - d\delta}{dÆ} \times 3438'.$$

Par exemple, le 10 avril, où la culmination a été observée à $2^h 4^m$, on a

$$\lambda = 44°47', \quad \frac{d\lambda}{dt} = 10',$$

$$\delta = 81°58', \quad \frac{d\delta}{dt} = -0',92,$$

$$\frac{dÆ}{dt} = 1^h + \frac{dL}{dt} - \frac{de}{dt} = 1^h + 46^s,68 = 911',5.$$

On a ainsi $Æ = 56',6 = 3^m 46^s,4$, et, si l'on calcule la réduction correspondante au méridien, on trouve $r = 0',55$. Le calcul de la colatitude par cette observation doit donc être rectifié ainsi :

	° ′
z........	37.11,7
r........	0. 0,6
z_m......	37.11,1
δ........	81.57,8
λ........	44.46,7

Nous avions trouvé 44°46',1. L'erreur commise est d'une demi-minute, mais on néglige d'en tenir compte.

La seconde remarque que nous voulions faire, c'est que, dans la pratique journalière, l'estime se mêle forcément aux calculs astronomiques et en vicie le résultat, parce que, les deux coordonnées λ et L étant déterminées à des heures très différentes, on est obligé, pour faire le point, d'appliquer à l'une d'elles le chemin parcouru par le navire dans l'intervalle. Il y aurait donc avantage à rapprocher beaucoup les deux observations.

Méthode des hauteurs à peu près correspondantes; point complet à midi.

Cette méthode, extrêmement simple, consiste à observer comme d'ordinaire à l'instant de la culmination pour avoir la colatitude, et, en outre, trente ou quarante minutes avant et après midi pour avoir l'heure par des distances zénithales du Soleil égales ou très peu différentes. L'avantage de ce procédé est double : 1° en prenant la moyenne des deux corrections de la longitude ainsi obtenue, on élimine l'influence d'une erreur constante soit sur la colatitude, soit sur les deux distances zénithales extra-méridiennes ; 2° l'erreur de l'estime n'intervient plus que pour une part minime, c'est-à-dire pour l'intervalle des observations, qui se trouve réduit à soixante ou quatre-vingts minutes. Et ce double avantage compense parfaitement l'infériorité d'observations aussi rapprochées du méridien quand il s'agit d'en déduire l'heure. Il est donc aisé d'obtenir ainsi, indépendamment du point estimé, le point astronomique complet une demi-heure après midi, circonstance qui peut avoir son prix dans la pratique. Comme nous n'avons pas ici de formules nouvelles à établir, il suffira de donner un exemple.

Le 10 *avril* 1878, *outre l'observation de la culmination, qui a donné* $\lambda = 44°46',1$ *à* $2^h 4^m$, *valeur qui, comme nous l'avons vu, est en erreur de* 0',6, *on a observé le Soleil à* $1^h 30^m$ *par* $z = 37°53'$ *et à* $2^h 32^m$ *par* $z = 37°44',2$; *la marche horaire du navire a été, dans l'intervalle, de* $+46^s$ *en longitude et* $+10'$ *en colatitude : déduire de là le point astronomique sans se servir du point estimé autrement que pour prendre* δ *et* e *dans la* Connaissance des Temps.

Voici le calcul en détail par la formule (a') :

	$1^h 30^m$.		$2^h 32^m$.
λ à $2^h 4^m$..........	$44°.46',1$		$44°.46',1$
m^+ pour -34^m.	$-0.5,7$	pour 28^m..	$+0.4,9$
	$44.40,4$		$44.50,7$

	$1^h 30^m$.	$2^h 32^m$.
δ	81°58′,3	81°57′,4
z_m	37.17,9	37. 6,7
z	37.53,0	37.44,25
$z - z_m$	0.35,1	0.37,55
$\frac{1}{2} z + z_m$	37.35,5	37.25,5
$\log \sin \frac{1}{2}(z - z_m)$	7,70801	7,73731
$\log \sin \frac{1}{2}(z + z_m)$	9,78535	9,78370
$C^t \log \sin \lambda$	0,15301	0,15169
$C^t \log \sin \delta$	0,00427	0,00429
$\log 2 \sin^2 \frac{1}{2} Æ$	7,65064	7,67699
$Æ$	— 0.30.40,8 (h m s)	0.31.37,5 (h m s)
H_v	23 29.19,2	
e	0. 1 18,9	0. 1.18,2
H	23.30.38,1	0.32.55,7
H_p	1.30. 0,0	2.32. 0,0
L	22. 0.38,1	22. 0.55,7

La longitude obtenue par la première observation est de 15^s,1 trop forte par suite de l'erreur de 0′,5 à 0′,6 de la colatitude adoptée; la longitude déduite de la seconde est de 14^s,8 trop faible. Leur moyenne sera donc exacte dans la limite de l'exactitude que l'on atteint avec cinq décimales.

Cela tient à ce que, les angles horaires, comptés à l'est et à l'ouest sans acception de signes, étant à peu près égaux, une même erreur sur les deux λ ou les deux z produira sur ces angles sensiblement la même altération. Mais, comme dans le calcul de la longitude le premier angle horaire, pris négativement, doit être retranché de 24^h, ces deux altérations égales produiront des effets opposés sur les longitudes conclues et doivent disparaître dans la moyenne. L'important ici n'est pas d'avoir des λ rigoureux; il suffit que la différence de ces colatitudes donnée par l'estime soit exacte. De même il n'est pas nécessaire que les z mesurés soient exempts de toute erreur; il suffit que les erreurs, s'il y en a, soient les mêmes sur les deux z.

Il nous reste à apprécier l'erreur probable du résultat. Nous avons

$$d\mathcal{H} = \frac{1}{\sin\lambda}\sqrt{\left(\frac{dz}{\sin A}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{\tang A}\right)^2}.$$

Quand il s'agit de la somme des deux angles horaires, les erreurs ne portent plus que sur la différence des z et sur celle des λ; on aura donc, pour l'incertitude de cette somme,

$$\frac{1}{\sin\lambda}\sqrt{2\left(\frac{dz}{\sin A}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta\lambda}{\tang A}\right)^2},$$

en désignant par $\Delta\lambda$ le chemin parcouru en colatitude dans l'intervalle des observations. Ici ce chemin est de $10',3$; mais l'incertitude, taxée au vingtième de v (p. 235), est de $0',7$. Supposons, pour mettre les choses au pis, que l'erreur accidentelle de z soit de $\pm 0',5$. Nous aurons, en remarquant qu'ici $A = -12°32'$ dans la première et $12°58'$ dans la seconde, et qu'on peut attribuer dans l'une et l'autre à $\frac{1}{\sin A}$ et à $\frac{1}{\tang A}$ la même valeur $4,5$,

$$6,4\sqrt{0,50 + 0,49} = \pm 6',4;$$

mais, en prenant la moyenne, cette erreur se trouvera divisée par 2 et se réduira à $3',2 = \pm 12^s,8$.

Nous sommes bien loin, en apparence, du degré de précision qu'on obtient couramment par un angle horaire pris le matin ou le soir à 5^h ou 6^h du méridien; mais nous avons déjà fait remarquer qu'il ne faut pas juger ainsi des choses. Comme il s'agit, en dernière analyse, de faire le point, il faudra ajouter, à la longitude obtenue le matin avec une grande précision, tout le chemin parcouru en longitude depuis cette heure. Or, dans l'exemple que nous avons donné plus haut (p. 265), l'espace parcouru v était de $12',9 \times 5 = 64',5$. En portant au vingtième l'incertitude de cette donnée de l'estime, la longitude calculée pour midi aura de ce chef seul une erreur probable de $\pm 18^s$, erreur exactement du même ordre que celle de la méthode que nous proposons.

Les erreurs qui se trouvent ainsi éliminées sont surtout

les erreurs instrumentales, qui affectent également deux distances zénithales peu différentes, celle de la dépression, car aux environs de midi nous avons vu que la dépression a une constance remarquable ([1]), et celle qui tient à l'individualité de l'observateur. Celui-ci peut avoir en effet l'habitude de faire trop mordre les images dans la lunette de son sextant ou de les laisser au contraire trop écartées. C'est aussi l'erreur de la colatitude. Celles qui subsistent sont les erreurs accidentelles des deux mesures de z et de z', et celle de l'estime, mais seulement entre $1^h 30^m$ et $2^h 32^m$.

Nous avons supposé que la culmination avait été observée pour la colatitude. S'il en était autrement, les deux observations de $1^h 30^m$ et $2^h 32^m$ suffiraient pour la déterminer avec une grande précision; on les calculerait toutes les deux, une première fois, pour en tirer les deux λ à l'aide de la longitude estimée. La moyenne des deux résultats serait exempte de l'erreur propre à cet élément, ainsi que nous l'avons fait remarquer déjà.

On ne gagnerait rien à écarter beaucoup plus les observations. Il ne faudrait pas non plus les rapprocher trop de l'instant de midi; le mieux serait, à notre avis, de calculer d'avance, par l'estime, l'instant du passage du Soleil au méridien, et de faire trois observations, l'une à midi, les deux autres à 20^m, 30^m ou 40^m avant et après midi, autant que possible à des intervalles égaux, et de jeter le loch entre les observations. L'important n'est pas d'assurer au navire une vitesse régulière, mais de déterminer avec un peu plus de soin qu'à l'ordinaire le mouvement en longitude et en colatitude pendant la durée de ces observations.

Hauteurs correspondantes à terre.

Le procédé que nous venons de décrire ressemble beaucoup

([1]) Au contraire, le matin et le soir, la dépression varie rapidement; les valeurs tabulaires deviennent incertaines, et leurs erreurs se reportent en entier sur l'angle horaire conclu de la distance zénithale observée.

à la méthode des hauteurs correspondantes, dans laquelle on s'attache à observer un astre à la même distance zénithale, à droite et à gauche du méridien ; mais cette méthode serait inapplicable en mer. Comme on en tire un excellent parti à terre pour déterminer la marche des chronomètres, nous allons l'exposer ici.

D'abord, pour les étoiles, elle est d'une grande simplicité. Soient H_s et H'_s les heures sidérales de l'observation, c'est-à-dire les heures où une étoile a atteint la même distance zénithale (d'ailleurs inconnue) de part et d'autre du méridien. On aura, pour l'heure du passage au méridien, $\frac{H_s + H'_s}{2}$, et, comme cette heure doit être justement l'Æ de l'étoile, l'erreur du chronomètre sera $\frac{H_s + H'_s}{2} - Æ$. Cela suppose seulement que la réfraction atmosphérique n'a pas varié dans l'intervalle.

S'il s'agit du Soleil, le mouvement de cet astre en distance polaire exige une petite correction à appliquer à la moyenne des heures. En désignant par δ la distance polaire pour l'heure H et par $\delta + \Delta\delta$ celle qui répond à l'heure H', l'équation (a) nous donnera la petite variation $\Delta Æ$ due à $\Delta\delta$ par les relations

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos Æ,$$
$$\cos z = \cos\lambda \cos(\delta + \Delta\delta) + \sin\lambda \sin(\delta + \Delta\delta) \cos(Æ + \Delta Æ).$$

Développons la seconde équation en traitant $\Delta\delta$ et $\Delta Æ$ comme des différentielles et retranchons-en la première ; il viendra

$$0 = (-\cos\lambda \sin\delta + \sin\lambda \cos\delta \cos Æ)\Delta\delta - \sin\lambda \sin\delta \sin Æ \, \Delta Æ.$$

On en tire $\Delta Æ$ exprimé en secondes d'arc comme $\Delta\delta$:

$$\Delta Æ = \left(\frac{\cot\delta}{\operatorname{tang} Æ} - \frac{\cot\lambda}{\sin Æ}\right)\Delta\delta.$$

Il faudra donc retrancher $\frac{\frac{1}{2}\Delta Æ}{15}$ de la moyenne des heures $\frac{H + H'}{2}$ pour avoir celle du passage du Soleil au méridien. Cette correction exige déjà un certain calcul. Si l'on voulait ap-

pliquer en mer le même procédé, c'est-à-dire observer de part et d'autre du méridien des hauteurs exactement égales du Soleil, et déterminer par le calcul la correction à appliquer à la moyenne des heures pour avoir celle du midi vrai, on serait conduit à des calculs plus longs encore, car il faudrait tenir compte à la fois de la variation de δ et des variations bien plus considérables de L et de λ.

CHAPITRE XXXII.

PROBLÈME DE DOUWES.

Douwes était un navigateur hollandais qui posa le premier fort nettement et résolut le problème général de la navigation astronomique. L'état du ciel ne permet pas toujours d'observer le Soleil à midi pour avoir la colatitude, et par l'azimut de $\pm 90^\circ$ pour avoir l'heure; mais, avec deux mesures de distance zénithale faites à des instants quelconques, on est toujours en état de déterminer l'heure du lieu et la colatitude, pourvu que les deux observations soient suffisamment écartées l'une de l'autre. Les inconnues sont encore λ et H ou $H_p + L$; les données sont deux distances zénithales z et z', l'une à l'heure H_p, l'autre à l'heure H'_p, plus le déplacement du navire dans l'intervalle, c'est-à-dire $\Delta\lambda$ en colatitude, ΔL en longitude. Enfin l'estime donne en outre des valeurs approchées de λ et de H, ou de λ et de L si l'on suppose l'heure de Paris exactement connue. Les équations de ce problème fort simple sont

$$(1)\qquad \cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos(H_p - e + L),$$

$$(2)\qquad \cos z' = \cos(\lambda + \Delta\lambda)\cos\delta' + \sin(\lambda + \lambda\Delta)\cos(H'_p - e' + L + \Delta L).$$

Pour appliquer les procédés ordinaires de l'élimination à ces

deux équations et en tirer les valeurs des inconnues λ et L, il faudrait faire disparaître $\Delta\lambda$, qui se trouve engagé avec λ, dans la seconde, sous les signes sinus et cosinus. C'est à quoi l'on parvient en remplaçant z', mesuré à la seconde station, par la distance zénithale z'', que l'on eût obtenue à la première, à l'heure H'_p, si l'observateur y était resté. Nous verrons plus loin (p. 308) comment on calcule $z''-z'$. Dans ce cas, les deux équations deviennent

$$\cos z = \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos(H_p - e + L),$$
$$\cos z'' = \cos\lambda\cos\delta' + \sin\lambda\sin\delta'\cos(H'_p - e' + L),$$

et elles conviennent au cas où l'observateur a mesuré z et z'' dans la même station. Alors, en posant

$$H_p - e + L = X,\quad H'_p - e' + L = X + \alpha,$$
$$\cos\lambda = x,\quad \sin\lambda\cos X = y,\quad \sin\lambda\sin X = v,$$

on a le système des trois équations

$$x^2 + y^2 + v^2 = 1,$$
$$\cos z = x\cos\delta + y\sin\delta,$$
$$\cos z'' = x\cos\delta' + y\sin\delta'\cos\alpha - v\sin\delta'\sin\alpha.$$

On éliminera y et v, et l'on aura une équation du second degré en x. Il y aura donc deux solutions. On choisira celle qui se rapproche du point estimé.

Cette solution algébrique est impraticable; mais il y a des moyens fort simples de résoudre numériquement les équations (1) et (2), soit par la méthode graphique, soit par celle des approximations successives.

Méthode graphique.

Elle consiste à construire point par point les deux courbes que les équations (1) et (2) représentent quand on y considère λ et L comme des coordonnées courantes. Comme elle n'exige aucune autre explication, nous allons l'appliquer immédiatement à l'exemple suivant. Le 22 décembre 1878, on a fait,

le matin, les observations suivantes du Soleil :

$$H_p = 8^h 44^m 33^s,3, \quad z = 77^\circ 14',0,$$
$$H'_p = 13^h 33^m 20^s,2, \quad z' = 38^\circ 45',0.$$

L'estime donnait à ces deux instants :

$$L = 128^\circ 29',3, \qquad \lambda = 144^\circ 42',9,$$
$$L + \Delta L = 126^\circ 47',1, \quad \lambda + \Delta\lambda = 143^\circ 53',2.$$

On trouve dans la *Connaissance des Temps*

$$e = -1^m 29^s,5, \quad \delta = \delta' = 113^\circ 27',3.$$
$$e' = -1^m 23^s,3,$$

On en déduit

$$H_p - e = \quad 8^h 46^m 2^s,8 \quad = 131^\circ 30',7,$$
$$H'_p - e' + \Delta L = 203^\circ 40',9 - 1^\circ 42',2 = 201^\circ 58',7.$$

Donnons à la variable λ une suite de valeurs arbitraires en commençant par celle de l'estime :

$$\lambda_1 \ldots\ldots \quad 144^\circ 42',9$$
$$\lambda_2 \ldots\ldots \quad 144.42,9 + 20'$$
$$\lambda_3 \ldots\ldots \quad 144.42,9 + 40'$$

Le plus simple est de recourir aux sinus verses et d'écrire pour la première équation (p. 289)

$$\sigma z = \sigma(\lambda - \delta) + \sin\lambda \sin\delta \sigma (H_p - e + L).$$

On en déduira trois valeurs correspondantes L_1, L_2, L_3 de la longitude par un simple calcul d'angle horaire; λ_1 et L_1, λ_2 et L_2, λ_3 et L_3 seront les coordonnées de trois points de la courbe représentée par l'équation (1). En opérant de même sur l'équation (2), on aura les coordonnées λ_1 et L'_1, λ_2 et L'_2, λ_3 et L'_3 de trois points de la seconde courbe.

Première équation.

λ_1.....	144°42′,9	σz.........	0,77902	C′logsin δ.	0,03745	$H_p - e + L_1$..	258°41′,5
δ......	113.27,3	$\sigma(\lambda_1 - \delta)$.	0,14518	C′logsin λ.	0,23834	$H_p - e$.......	131.30,7
$\lambda_1 - \delta$.	31.15,6	Diff.......	0,63384	logdiff....	9,80198	L_1......	127.10,8
				log σ AH....	0,07777		
$\lambda_2 - \delta$.	31.35,6		0,77902		0,03745		253.28,5
			0,14821		0,24175		131.30,7
			0,63081		9,79990	L_2......	126.57,8
					0,07910		
$\lambda_3 - \delta$.	31.55,6		0,77902		0,03745		258.12,0
			0,15127		0,24557		131.30,7
			0,62775		9,79779	L_3......	126.41,3
					0,08081		

Seconde équation.

Mêmes calculs en donnant à $\Delta\lambda$ et à ΔL les valeurs de l'estime — 49′,7 et — 1°42′,2.

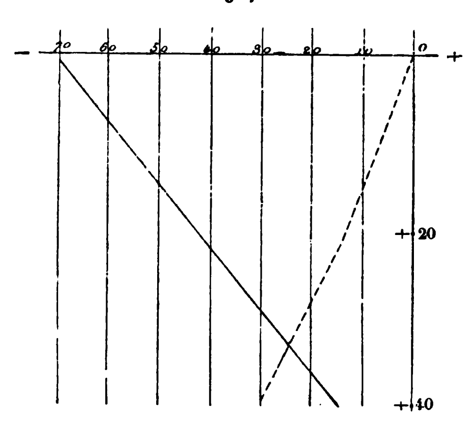
λ'_1.....	143°53′,2	$\sigma z'$.	0,22012		0,03745	$H'_p - e' + L'_1 + \Delta L$.	327°57′,8
δ'.....	113.27,3		0,13777		0,22960	$H'_p - e' + \Delta L$......	201.58,7
$\lambda'_1 - \delta$.	30.25,9		0,08235		8,91566	L'_1..........	125.59,1
				log σ AH′.	9,18271		
$\lambda'_2 - \delta'$.	30.45,9		0,22012		0,03745		328.25,7
			0,14073		0,23309		201.58,7
			0,07939		8,89977	L'_2........	126.27,0
					0,17031		
$\lambda'_3 - \delta'$.	31. 5,9		0,22012		0,03745		328.54,9
			0.14372		0,23662		201.58,7
			0,07640		8,88309	L'_3..........	126,56,2
					9,15716		

On construira les deux courbes sur papier quadrillé en prenant le millimètre pour représenter la minute ou le mille. L'origine étant mise au premier point, on retranchera 127°10′,8 de toutes les longitudes et 144°42′,9 de toutes les colatitudes.

Voici le Tableau des coordonnées des deux courbes :

	En longitude.	
En colatitude.	Première courbe.	Seconde courbe.
0°. 0′	0′,0	— 1°.11′,7
0.20	— 13,0	— 0.43,7
0.40	— 29,5	— 0.14,6

Fig. 71.



On portera les longitudes et les colatitudes en vraie grandeur à l'échelle de l'épure [1]. La première courbe est presque une ligne droite; la seconde a une courbure plus prononcée, dont il faut tenir compte en la traçant par les trois points calculés. Il ne reste plus qu'à relever sur l'épure les coordonnées du point de rencontre, — 23′,9 en longitude et 33′,5 en colatitude. La position du navire était donc :

		144°.42′,9		127°.10′,8
		0.33,5		— 0.23,9
A l'heure H_p :	λ.....	145.16,4	L.....	126.46,9
	Δλ....	0.49,7	ΔL....	— 1.42,2
A l'heure H'_p :	λ′.....	144.26,5	L′....	125. 4,7

(1) Si, pour plus d'exactitude, on opérait sur une projection de Mercator, il faudrait ramener les différences de colatitude à l'échelle variable de ces Cartes.

En prenant une échelle double, on répondra du dixième de minute. Si l'on considère la simplicité de ces calculs, d'un seul et même type familier à tous les marins, et celle de la construction graphique, on conviendra que ce procédé pour la résolution des équations du problème de Douwes est tout à fait pratique. Le calcul peut être réduit d'un tiers si l'on se contente de deux points pour chaque courbe.

La première courbe est, sur la sphère, un cercle de rayon z; son équation (1) exprime en effet que le troisième côté d'un triangle PZS, c'est-à-dire la distance de Z à un point fixe S, est z. Si l'on fait varier les coordonnées de Z, c'est-à-dire λ et L, on aura, sur le cercle susdit, tous les points de la sphère qui satisfont à cette condition-là.

La seconde courbe, équation (2), est un cercle dont on augmenterait les coordonnées λ de la constante $\Delta\lambda$. Ce n'est donc pas un cercle à proprement parler, mais cela ne gêne en rien la construction graphique, puisque nous n'avons à dessiner qu'une portion très petite et presque rectiligne de ces courbes.

Approximation successive par simple interpolation.

On évite le tracé de ces courbes au moyen d'une interpolation familière aux calculateurs. Les deux premières hypothèses sur λ nous ont donné, par de simples calculs d'angles horaires :

		$\lambda = 144°42',9.$	$\lambda = 145°2',9.$
Première équation :	L.....	127°.10',8	126°.57',8
Seconde équation :	L.....	125.59,1	126.27,0
	Diff...	+ 1.11,7	+ 0.30,8

La vraie valeur de λ est celle qui fera disparaître ces différences. Or une augmentation de 20' dans λ la réduit de 1°11',7 à 30',8, c'est-à-dire de 40',9. En posant une proportion, on trouvera

$$\frac{20}{40,9} \times 30',8 = \frac{x}{30,8}, \quad \text{d'où} \quad x = 15',1$$

pour l'augmentation qu'il faut faire subir au dernier λ. Sa valeur est donc $145°18',0$. Si l'on s'en tient à cette première approximation, on aura la longitude correspondante par le même procédé. Pour $20'$ d'augmentation dans λ, L a diminué de $13',0$. Pour $15',1$, elle devra diminuer de

$$\frac{13,0}{20} \times 15',1 = 9',8.$$

La longitude cherchée, à l'instant de la première observation, était donc de $126°48',0$. A titre de vérification, on fera $\lambda_3 = 145°18',0$ et l'on aura :

Première équation.

145°.18',0	0,77902	0,03745	258°.15',7
113.27,3	0,15052	0,24467	131.30,7
31.50,7	0,62850	9,79831	126.45,0
		0,08043	

Seconde équation.

144°.28',3	0,22012	0,03745	328°.47',8
113.27,2	0,14300	0,23574	201.58,7
31. 1,1	0,07712	8,88717	126.49,1
		9,16036	

Une deuxième approximation étant nécessaire, on aura immédiatement, pour la correction de la dernière colatitude,

$$\frac{15,1}{30,8 + 4,1} \times (-4',1) = -1',8.$$

Le résultat final est ainsi, pour la première station,

$$\lambda = 145°16',2, \quad L = 126°46',5.$$

Cette interpolation par parties proportionnelles suppose que les variations de la longitude, qui est une fonction de λ, sont proportionnelles à celles de la variable λ. Cela n'est vrai rigoureusement que pour les variations infiniment petites; mais par des approximations successives on se rapproche de plus en plus de cette condition, et l'on arrive au but avec le degré

d'exactitude que l'on voudra atteindre. Au point de vue géométrique, cette méthode revient à substituer, aux deux courbes, deux sécantes déterminées par des points d'intersection très rapprochés. Le point de rencontre de ces sécantes différera peu du point de rencontre des courbes elles-mêmes. A la seconde approximation, on opère sur deux nouvelles sécantes encore plus rapprochées du point cherché, et ainsi de suite. Le mérite de cette méthode, au point de vue nautique, consiste en ce que les calculs se rapportent tous à une seule et même formule familière; ils n'exigent point de contention d'esprit; aucune erreur ne se glissera dans cette répétition continuelle d'un même type. D'ailleurs, les courbes dont il s'agit se confondent de si près avec leurs sécantes, sauf le cas de très petites distances zénithales, que la première opération suffit le plus souvent [1].

Approximation successive par la méthode de Newton.

Il s'agit de résoudre numériquement deux équations de forme quelconque

$$F(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 0,$$

connaissant des valeurs approchées a et b des inconnues x et y. Désignons par h et i les petites corrections qu'il faut ajouter à ces valeurs.

On a en général, par la série de Taylor étendue à deux variables,

$$F(x+h, y+i) = F(x, y) + h\frac{dF}{dx} + i\frac{dF}{dy} + \ldots = 0.$$

Si l'on remplace x et y par leurs valeurs approchées a et b dans $F(x, y)$ et ses dérivées, on aura, en négligeant les puissances supérieures et les produits des petites corrections h et i,

---

[1] Le cas d'une très petite distance zénithale ne constitue d'ailleurs nullement un embarras pour ces méthodes, car il rentre dans celui des observations circumméridiennes.

les deux équations suivantes :

$$F(a,b) + h\frac{dF}{dx} + i\frac{dF}{dy} = 0,$$
$$f(a,b) + h\frac{df}{dz} + i\frac{dF}{dy} = 0.$$

La résolution de ces équations linéaires en h et i sera extrêmement simple et donnera pour x et y les valeurs $a + h$, $b + i$, plus approchées que les premières. En les substituant dans les équations proposées et dans les coefficients différentiels $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, ..., on formera deux nouvelles équations entre les seconds résidus et de nouvelles corrections h' et i', plus petites que les précédentes. Les termes d'ordre supérieur négligés dans ces équations linéaires étant encore plus petits que la première fois, la deuxième opération conduira bien plus près du but, et au besoin l'on procéderait à une troisième.

La différence entre cette troisième méthode et la deuxième consiste en ce que, par celle-ci, on obtient des valeurs approchées des quotients différentiels en divisant l'accroissement de la fonction par le petit accroissement fini donné à la variable, tandis qu'ici on en calcule les valeurs par des expressions algébriques faciles à former. Géométriquement parlant, on remplace, dans la précédente, les deux courbes par des sécantes; ici on les remplace par leurs tangentes, car celles-ci ont pour équations précisément les fonctions linéaires ci-dessus, quand on y considère h et i comme des coordonnées courantes.

Ici les équations proposées sont de la forme

$$\cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos \mathcal{H} - \cos z = 0;$$

on aura donc

$$\frac{dF}{d\lambda} = \sin z \cos A, \quad \frac{dF}{dL} = -\sin\lambda \sin\delta \sin A.$$

Désignons par λ_1 et L_1 les données de l'estime, et par r et r' les résidus de leur substitution dans les deux équations pro-

posées ; on aura, pour déterminer h et i, les équations linéaires

$$\frac{r}{\sin z} + h\cos A - i\sin\lambda_1 \sin A = 0,$$

$$\frac{r'}{\sin z'} + h\cos A - i\sin(\lambda_1 + \Delta\lambda)\sin A' = 0.$$

Méthode de Lalande.

La méthode de Newton n'est pas employée sous cette forme générale ; elle a été simplifiée comme il suit par Lalande. La colatitude étant généralement mieux connue que la longitude, portons sa valeur λ_1 dans les équations (1) et (2) : de la première on tirera une valeur quelconque de L, que nous désignerons par L_1 ; de la seconde équation on tirera la valeur L'_1. Si λ_1 était exact, L_1 et L'_1 seraient égaux. S'il n'en est pas ainsi, on cherchera la correction $d\lambda_1$ qu'il faut appliquer à λ_1 pour faire disparaître la différence. Or on sait que $dL = \frac{d\lambda}{\sin\lambda \tan A}$; nous aurons donc l'équation de condition linéaire à une seule inconnue

$$L_1 + \frac{x}{\sin\lambda_1 \tan A} = L'_1 + \frac{x}{\sin(\lambda_1 + \Delta\lambda)\tan A'},$$

qui est déjà toute résolue par rapport à x.

Nous allons appliquer la méthode de Lalande à l'exemple précédent en reproduisant les calculs déjà effectués, afin de mettre en évidence l'ensemble des opérations.

Les données sont :

		Première hypothèse.
$z = 77^\circ 14',0$,	Æ $= 131^\circ 30',7 + L$.	$\lambda_1 = 144^\circ 42',9$,
$z' = 38^\circ 45',0$,	Æ$' = 201^\circ 58',7 + L$,	$\lambda_1 + \Delta\lambda = 144^\circ 42',9 - 49',7$.

Première équation.

λ_1.....	$144^\circ.42',9$	σz..	0,77902	C^t log sin δ..	0,03745	Æ$_1$.	$258^\circ.41',5$
δ......	113.27,3		0,14518	C^t log sin λ_1.	0,23834		131 30,7
$\delta - \lambda_1$.	31.15,6	Diff.	0,63384	log diff.....	9,80198	L_1..	127.10,8
				σ Æ$_1$.......	0,07777		

Seconde équation.

λ'_1.....	$143^\circ 53',2$	0,22012	0,03745	$Æ'_1$.	$327^\circ 57',8$
	113.27,3	0,13777	0,22960		201.58,7
	30.25,9	0,08235	8,91566		125.59,1
			9,18271		

Voici le calcul des coefficients de x :

$\sin\delta$....	9,9626	tang A.	0,3785 n	$\sin\delta'$...	9,9625	tang A'.	0,0921
sin Æ...	9,9915 n	$\sin\lambda$...	9,7617	sin Æ..	9,7247 n	$\sin\lambda'_1$...	9,7704
$C^t \sin z$..	0,0109		0,1402 n	$C^t \sin z'$.	0,2035		9,8625
sin A....	9,9650 n	C^t.....	9,8598 n	sin A'..	9,8907 n	C^t.....	0,1375
A.......	292°42' (1)		—0,724	A'.....	231°2'		+1,375

Et voici l'équation de condition :

$$127^\circ 10',8 - 0,724\,x = 125^\circ 59',1 + 1,375\,x,$$

d'où

$$x = 34',2.$$

La correction de L_1 sera donc

$$-0,724 \times 34',2 = -24',8.$$

De là la solution :

λ_1...	$144^\circ 42',9$	L_1...	$127^\circ 10',8$
	+ 0.34,2		− 0.24,8
λ....	145.17,1	L....	126.46,0

Si l'on voulait pousser l'exactitude jusqu'aux secondes d'arc, ce qui serait ici bien superflu, on trouverait, avec une approximation de plus,

$$\lambda = 145^\circ 16' 10'', \quad L = 126^\circ 46' 19''.$$

Dans le cas d'une deuxième approximation, le calculateur a soin d'inscrire, à côté des logarithmes variables, les différences tabulaires, afin d'éviter d'ouvrir chaque fois les Tables dont on se sert. Il est impossible d'imaginer une méthode plus simple

(1) Un coup d'œil sur l'équation (b) montre que cos A doit être positif ici, et, par suite, que tang A doit avoir le signe —.

et plus expéditive. Le calcul même de l'azimut sera utilisé d'ordinaire pour la correction de la boussole et de l'angle de route. Dans ce but on ne manquera pas de relever à la boussole l'azimut magnétique du Soleil à l'une ou à l'autre observation de distance zénithale.

Discussion des anciennes méthodes au point de vue algébrique.

Quelles que soient les données, ces méthodes fourniront toujours la solution des équations (1) et (2) avec le degré d'approximation que l'on voudra obtenir. Le calculateur peut néanmoins rencontrer deux cas particuliers où les méthodes d'approximation successive semblent être en défaut.

Premier cas. — Lorsqu'une des deux observations a été faite près du méridien, la courbe représentée par l'équation correspondante court dans le sens des parallèles de la Carte, et il arrive alors qu'en donnant à la variable λ la valeur λ_1 de l'estime on trouve une valeur imaginaire pour L_1. Cela prouve seulement que l'on aurait dû déterminer tout d'abord une valeur plus exacte de λ en se servant de l'observation circumméridienne.

Second cas. — Si deux astres ont été observés par des azimuts dont la différence ne s'écarte pas beaucoup de 180°, les deux courbes seront coupées par le parallèle du point estimé sous des angles peu différents, leurs tangentes ou leurs sécantes se couperont très loin, et le point obtenu par leur rencontre sera, en certains cas, plus loin de la vérité que l'estime même. Dans ce cas, une seconde approximation est indispensable; mais il suffira de donner à λ une valeur intermédiaire entre ces deux extrêmes pour obtenir un bon résultat.

Quelques personnes ont cru que le fait de supposer $d\lambda$ proportionnel à dL constitue un vice des méthodes anciennes, et ont tenté d'y remédier en introduisant dans l'équation de correction les différentielles d'ordre supérieur, celles du second

par exemple. Si Newton ne l'a pas fait, c'est que sa méthode est d'approximation successive. Dans le cas où les termes du second ordre seraient assez sensibles pour que leur omission viciât la première approximation, il n'en serait plus de même à la seconde. Le mérite de la méthode de Newton ou de Lalande est justement d'éviter la complication que l'on introduirait dans les calculs en y faisant figurer les termes d'ordre supérieur.

CHAPITRE XXXIII.

DISCUSSION DES ANCIENNES MÉTHODES AU POINT DE VUE DES ERREURS D'OBSERVATION.

Il s'agit de savoir comment l'observateur doit agencer, non pas ses calculs, mais ses observations, de manière à soustraire autant que possible le résultat cherché à l'influence de ces erreurs inévitables.

Remarquons d'abord que l'erreur des montres, c'est-à-dire l'erreur commune à H_p et H'_p, se confond ici avec celle de la longitude, car ce que l'on détermine réellement par le problème de Douwes, c'est l'heure du lieu $H_p + L$ et la colatitude λ. Si dans ce qui va suivre nous mettons en évidence l'erreur de la coordonnée L, c'est que nous faisons abstraction de l'erreur des montres; nous la supposons nulle. Dès lors, en mettant de côté les données δ, δ', e, e' empruntées à la *Connaissance des Temps*, qui sont toujours bien connues, même dans le cas d'une erreur très sensible sur H_p, il nous reste à examiner l'influence des erreurs commises sur z et z', et de celles de l'estime qui nous fournit $\Delta\lambda$ et ΔL. Il suffira pour cela de différentier les équations (1) et (2) par rapport à z, z', $\Delta\lambda$, ΔL et L, mais non par rapport à λ, puisque nos hypothèses portent sur cette variable.

Il vient ainsi par l'équation (1), pour une valeur λ_1 donnée à λ,

$$dL_1 = \frac{dz}{\sin\lambda_1 \sin A},$$

et par l'équation (2), en confondant $\sin(\lambda_1 + \Delta\lambda)$ avec $\sin\lambda_1$, ce qui est permis dans ces relations infinitésimales,

$$d(L'_1 + \Delta L) = \frac{dz'}{\sin\lambda_1 \sin A'} - \frac{d\Delta\lambda \cos A'}{\sin A'}.$$

La soustraction donne

$$d(L'_1 - L_1) = \frac{1}{\sin\lambda_1}\left(-\frac{dz}{\sin A} + \frac{dz'}{\sin A'} - \frac{d\Delta\lambda \cos A'}{\sin A'} - d\Delta L \sin\lambda_1\right).$$

Passant des différentielles aux erreurs probables et divisant celles de $L'_1 - L_1$ par le coefficient de x dans l'équation de Lalande, c'est-à-dire par $\frac{1}{\sin\lambda_1}\left(\frac{1}{\operatorname{tang} A} - \frac{1}{\operatorname{tang} A'}\right)$, il vient finalement, pour l'erreur probable de x et par suite de la colatitude à la première station,

$$\pm \frac{\sqrt{(dz \sin A')^2 + (dz' \sin A)^2 + (d\Delta\lambda \cos A' \sin A)^2 + (d\Delta L \sin\lambda_1 \sin A \sin A')^2}}{\sin(A' - A)}.$$

D'après cela, le système d'observation le plus avantageux, au point de vue de la moindre influence des erreurs inévitables des observations sur la colatitude, serait d'avoir A très petit et A' très voisin de 90°. L'erreur sur λ se réduirait alors sensiblement à $\pm dz$. Mais on retomberait ainsi sur le système d'observation que tout le monde pratique chaque jour lorsque le ciel est beau, et nous sortirions du problème de Douwes, car celui-ci ne se pose que quand on n'a pu observer près du méridien, ou près d'un azimut de 90°.

En dehors de ce cas, A et A' ne pouvant être ni très petits ni voisins de 90°, la formule précédente nous montre qu'il faut du moins s'arranger de manière que A' — A soit le plus voisin possible de 90°. C'est du reste ce que l'on voit de suite par le coefficient de x, c'est-à-dire $\frac{1}{\sin\lambda_1}\left(\frac{1}{\operatorname{tang} A} - \frac{1}{\operatorname{tang} A'}\right)$. Pour

qu'il soit de grandeur notable avec des valeurs moyennes de $\tang A$ et de $\tang A'$, il faut que ces deux tangentes soient de signes contraires. On s'attachera donc autant que possible à observer de part et d'autre du méridien, ou, si l'on est forcé de se borner à un même côté de ce plan, à observer de part et d'autre d'un plan qui lui soit perpendiculaire.

Il faut ici appeler l'attention sur l'importance et le rôle des erreurs de l'estime. En laissant de côté les petits termes en dz et en dz', la formule précédente se réduit à (p. 235)

$$\pm \frac{\rho}{20} \frac{\sin A}{\sin(A' - A)}.$$

Le choix des observations, de nulle importance au point de vue mathématique, en a une au point de vue des erreurs de l'estime. Nous avons fait figurer la marche du navire, c'est-à-dire $\Delta\lambda$ et ΔL dans la seconde équation, prenant ainsi pour inconnues les coordonnées λ et L de la première. De cette façon, l'erreur de l'estime, qui peut aller à $\frac{\rho}{20}$, a eu pour facteur $\sin A = 0,923$. Dans le cas contraire, l'erreur de l'estime aurait eu pour facteur $\sin A' = 0,778$. L'erreur de x aura donc des valeurs différentes, selon qu'on partira de la seconde ou de la première station.

En résumé, il n'y a ni exceptions ni défaillances à craindre dans l'emploi des vieilles méthodes. Deux équations numériques étant données, ces méthodes conduiront toujours à deux nombres qui y satisferont aussi exactement qu'on le voudra. L'observateur n'a à s'occuper que d'une seule chose, la même par tous les procédés imaginables : c'est d'agencer ses observations de manière à laisser le moins d'influence possible aux erreurs inévitables desdites observations.

Il nous reste à dire quelques mots de la longitude que l'on déduit de ces calculs ou de ces constructions. Au fond, le problème de Douwes ne sert à déterminer, par deux distances zénithales, que l'heure du lieu H et la colatitude. Si l'heure de Paris H_p est connue en même temps, on a la longitude $L = H - H_p$. Cette heure de Paris ne peut être donnée que

par les chronomètres ou par la Lune. Elle l'est avec une incertitude qui va croissant avec le temps écoulé depuis le départ si on l'emprunte aux chronomètres. Il n'y a aucun moyen certain (en dehors des distances lunaires) de s'assurer que les chronomètres ont conservé à la mer la marche déterminée à terre avant le départ. Il nous est donc impossible de faire entrer dans l'appréciation de l'erreur finale sur L cet élément inconnu quand on se fie aux chronomètres pour l'heure de Paris. Au contraire, quand on la demande aux observations de la Lune, on a toujours le moyen d'en déterminer l'erreur probable. Alors l'erreur de la longitude conclue dL a pour expression

$$\pm\sqrt{(d\mathrm{H})^2+(d\mathrm{H}_p)^2},$$

dH étant ici l'erreur probable de l'heure du lieu, que nous avons conventionnellement désignée plus haut par dL. Le lieu du navire sur la Carte n'est plus un point, mais un rectangle ayant pour base $2d$L et pour hauteur $2d\lambda$. Il est probable que le navire se trouve quelque part dans ce rectangle, dont le centre a pour lui un certain excès de probabilité sur les autres points.

CHAPITRE XXXIV.

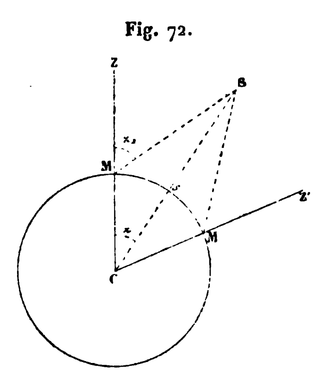
MÉTHODES NOUVELLES.

Cercles de hauteur.

Du point M on a observé, à un instant donné, la distance zénithale ZMS $= z_1$ d'un astre S (corrigée de la réfraction). La droite CS menée du centre de la Terre au point S coupera CZ sous l'angle $z_1 - p = z$. Faisons tourner la figure autour de cette ligne CS; le point M décrira un petit cercle de rayon sphérique z autour du pôle s, point où CS rencontre la sphère,

tandis que les lignes CZ, MS décriront des cônes droits ayant CS pour axe. Le petit cercle MM′ jouit de la propriété que de tous

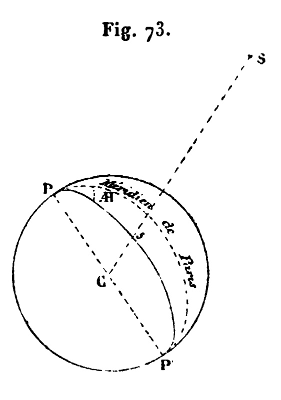
Fig. 72.



ses points on verrait, au même instant, l'astre S par la même distance zénithale z_1.

Le pôle s de ce petit cercle est facile à déterminer à l'aide de la *Connaissance des Temps*, qui donne, pour l'heure H_p de l'observation en M, les coordonnées uranographiques Æ et δ

Fig. 73.



de l'astre S et l'heure sidérale à Paris H_{sp}. A cet instant, l'angle horaire compté du méridien de Paris sera H_{sp} — Æ = Æ. L'astre et la ligne CS se trouveront donc dans un méridien céleste faisant l'angle Æ avec le méridien de Paris, et le point s aura pour distance polaire, c'est-à-dire pour colatitude, l'angle PCS = δ. Si nous comptions les longitudes terrestres dans le même sens

que les angles horaires, $\mathcal{H}$ serait la longitude du point s; mais, comme nous les comptons en sens opposé, les coordonnées de s seront $L = 360° - \mathcal{H}$, $\lambda = \delta$. S'il s'agit du Soleil, $\mathcal{H} = H_v = H_p - e$, et nous aurons $L = 360° - (H_p - e)$.

D'un point dont les coordonnées géographiques sont complètement inconnues, on a observé la distance zénithale du Soleil à deux instants H_p et H'_p, et trouvé, après réduction de réfraction et de parallaxe, z et z'. Pour le jour et les heures de ces deux observations, on a tiré de la *Connaissance des Temps* les éléments δ, δ', e, e'. Le point où se trouve l'observateur sera déterminé sur le globe terrestre par l'intersection de deux cercles ayant pour pôles, l'un le point s dont les coordonnées géographiques sont $L = 360° - (H_p - e)$ et $\lambda = \delta$, l'autre le point s' dont les coordonnées sont $L' = 360° - (H'_p - e')$ et $\lambda' = \delta'$. Par conséquent, il suffira de construire ces deux cercles, de rayon z et z', sur une projection stéréographique appropriée, pour déterminer la position inconnue de l'observateur.

Prenons l'exemple précédent, qui nous donne :

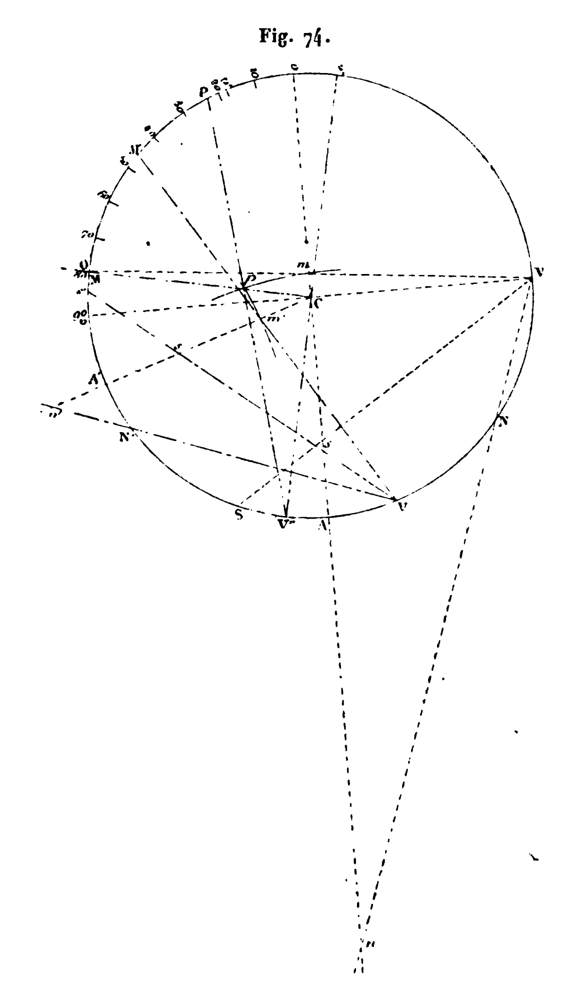
Coordonnées des points s et s'..	L....	$228°.29'$	$\lambda = \delta$....	$66°.33'$	compté du pôle sud.	
	L'....	156.19	$\lambda' = \delta'$....	66.33	id.	id.
	z....	77.14	z'........	38.33		

Dans un cercle de rayon arbitraire, divisé en degrés, menons CA, méridien du point s. Le point de vue étant rabattu en V, sur la perpendiculaire vV à CA, on prendra $v\text{S} = 66°33'$, et l'on mènera VS qui coupe en s la ligne CA. Le point s est le pôle du premier petit cercle. Pour le construire, on portera un arc de $77°14'$ de S en M et de S en N, et l'on joindra M et N au point V; les points m et n seront les extrémités du diamètre de ce petit cercle, qu'on décrira sur mn.

Pour avoir le second petit cercle, on mènera CA', faisant avec CA l'angle $L - L' = 72°10'$. Le point de vue se rabattra en V' à 90° de A'. On portera en v'S' l'arc $\delta' = 66°33'$, et l'on joindra S' à V', ce qui donnera s'. Enfin on portera de S' en M' et en N' l'arc $z' = 38°33'$, et, en joignant ces points à V', on aura en $m'n'$ le diamètre du second cercle.

Soit p l'intersection de ces deux cercles; on mène CpQ et l'on mesure sur la graduation l'arc AQ, qui se trouve de 101°30′. En le retranchant de 228°29′, longitude du point A, on a 127°0′

Fig. 74.



pour longitude de l'observateur en p. Si V'' est pris à 90° de Q, on mènera $V''pP$ et l'on mesurera l'arc $v''P$. Cet arc égale 35°, et, par suite, la colatitude, comptée comme à l'ordinaire du pôle nord, est de 145°.

Nous avons trouvé plus haut par le calcul, pour la station,

$$\lambda = 145^\circ 16', \quad L = 126^\circ 46'.$$

L'erreur de la solution graphique est donc de 16′ en colatitude et de 14′ en longitude; mais la figure a été construite par nous sur une échelle trop faible et sans rapporteur.

Ici se présente une remarque essentielle. Nous avons supposé l'observateur immobile dans l'intervalle des deux mesures de distance zénithale; c'est à cette condition-là que les deux cercles se couperont au point où il se trouve. Si dans l'intervalle l'observateur se déplace, il faut en tenir compte et ramener la distance zénithale mesurée à la seconde station à ce qu'elle eût été si on l'avait prise de la première. De là une petite correction préalable que nous allons exposer.

Correction de la distance zénithale pour le déplacement de l'observateur.

Les équations du problème de Douwes sont

$$\cos z = \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos(H_p - e + L),$$
$$\cos z' = \cos(\lambda + \Delta\lambda)\cos\delta' + \sin(\lambda + \Delta\lambda)\sin\delta'\cos(H'_p - e' + L + \Delta L),$$

$\Delta\lambda$ et ΔL étant les chemins en colatitude et en longitude parcourus dans l'intervalle des observations. Quand on considère λ et L comme des coordonnées courantes sur la sphère, la seconde équation ne représente pas un cercle, mais une courbe peu différente d'un cercle qui coupe la première au point dont les coordonnées L et λ satisfont à la fois à ces deux équations. Or, pour appliquer la construction précédente, basée sur la propriété de la projection stéréographique de représenter rigoureusement par des cercles ceux qu'on trace sur la sphère, il faut que la seconde équation soit modifiée de manière à donner aussi un cercle; en d'autres termes, il faut ramener la seconde observation z' à ce qu'elle eût été si l'observateur était resté en place. Soit z'' cette distance zénithale ramenée à

l'horizon de la première station; nous aurons alors

$$\cos z'' = \cos\lambda \cos\delta' + \sin\lambda \sin\delta' \cos(H'_p - e + L),$$

équation qui représente un second cercle de rayon sphérique z''.

Soient Z et Z' les deux zéniths successifs de l'observateur, en sorte que sa route, projetée sur le ciel, soit $ZZ' = v$. Désignons par $ZE = z'$ la seconde distance zénithale mesurée en Z'

Fig. 75.

à l'heure H'_p, par $ZE = z''$ celle qu'il aurait observée au même instant s'il était resté en Z. Supposons en outre qu'en Z' il ait relevé au compas l'azimut de l'astre, c'est-à-dire l'angle $SZ'E = A'$ et l'angle de route V. L'angle en Z' du triangle EZZ' sera le supplément de $A' - V$; nous aurons donc z'' par l'équation

$$\cos z'' = \cos z' \cos v - \sin z' \sin v \cos(A' - V).$$

Posons $z'' = z' + x$; v et x étant de petits arcs, nous remplacerons leurs cosinus par les deux premiers termes de la série qui en donne la valeur et leurs sinus par le premier terme, de manière à ne négliger que les cubes de ces petites quantités. L'équation précédente devient ainsi

$$\cos z' - \tfrac{1}{2}x^2 \cos z' - x \sin z' = \cos z' - \tfrac{1}{2}v^2 \cos z' - v \sin z' \cos(A' - V),$$

d'où l'on tire, en exprimant x et v en minutes d'arc,

$$x = v\cos(A' - V) + \tfrac{1}{2}\frac{(v - x)(v + x)}{3438'}\cot z'$$

On se contente le plus souvent du premier terme de cette correction, à moins que z' ne soit très petit, cas que nous avons déjà exclu pour d'autres motifs.

Dans l'exemple précédent, l'observateur n'était pas resté immobile; il avait, dans l'intervalle des deux observations, parcouru un certain chemin, et les données étaient réellement celles-ci :

$$ZZ' = v = 77',6, \quad A' - V = 100°, \quad z' = 38°45',0.$$

Le calcul de la correction x sera donc :

$\log v$	1,890
$\log\cos(A'-V)$ ..	9,240n
	1,130n
x approché	$-0°13',5$
Deuxième terme.	$+0.\ 1,1$
x	$-0.12,4$
z'	38.45,0
z''	38.32,6

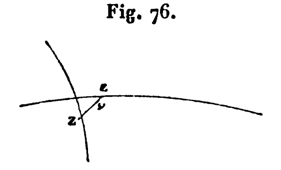
v	77',6
x	$-13,5$
$v-x$.	91,1
$v+x$.	64,1

$\log(v-x)$..	1,960
$\log(v+x)$..	1,807
$\log\frac{1}{2}$	9,699
$\log\cot z'$....	0,096
C'log 3438'..	6,437
	0,025
	$+1',1$

C'est là la distance zénithale que nous avons employée, sous le nom de z', pour la construction du second cercle de hauteur.

Si, malgré ce qui précède, on avait construit le cercle qui répond à la seconde distance zénithale $z' = 38°45',0$, les deux stations se seraient bien trouvées sur ces deux cercles, mais non plus à leur intersection. Il aurait fallu résoudre encore ce problème : *Mener entre ces deux cercles un arc de loxodromie ZZ' de longueur v et d'azimut* V. A la vérité cet arc

Fig. 76.



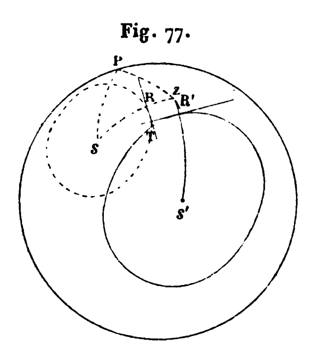
se confond sensiblement avec une ligne droite, quoique la projection soit stéréographique, en sorte que ce petit problème serait bien facile à résoudre.

Droites de hauteur de M. Marc Saint-Hilaire.

La construction précédente du problème de Douwes, bien que très facile, ne donnerait une exactitude suffisante qu'à la condition d'opérer sur une Carte à très grande échelle. Elle a, en outre, l'inconvénient d'exiger un genre de Carte ou de projection dont on ne fait pas un usage journalier dans la marine. En considérant que l'estime fournit toujours un point assez voisin de l'intersection des deux cercles de hauteur, on a eu l'idée de remplacer ceux-ci par deux tangentes menées à proximité du point estimé. L'intersection de ces tangentes remplacera à très peu près celle des cercles, que l'on se dispensera dès lors de tracer, et toute la construction se réduira à quelques droites qu'on mènera sur la Carte marine elle-même. Cette idée ingénieuse est due à un savant officier de notre marine, M. Marc Saint-Hilaire; nous allons l'exposer avec tous les développements qu'elle comporte.

Soient s et s' les pôles des deux petits cercles, Z le point estimé. Menons l'arc de grand cercle Zs, et soit R son point de rencontre avec le premier petit cercle. Si par le point R nous

Fig. 77.



menons une perpendiculaire à ZR, cette droite sera tangente au premier petit cercle et pourra le remplacer dans une petite étendue. Traçons pareillement l'arc Zs', qui coupe en R' le second cercle de hauteur, et par le point R' une nouvelle tan-

gente. Si l'on projette cette construction sur une Carte, il est clair que le point de rencontre de ces deux tangentes remplacera à très peu près l'intersection des deux cercles non tracés. La figure se réduira donc au petit quadrilatère ZRR'T, et on la construira à une échelle aussi grande qu'on le voudra dans le système des Cartes marines. Les points R et R' portent le nom de *points déterminatifs* des droites de hauteur RT, R'T; on les nomme aussi *points rapprochés,* pour les distinguer des points déterminatifs d'autres droites de hauteur dont il sera question plus loin.

Pour obtenir ces points, il faut recourir au calcul; la méthode que nous exposons n'est donc pas entièrement graphique. Le triangle PZs, où P représente le pôle, est connu par trois de ses éléments, P$s = \delta$, PZ $= \lambda$ et l'angle en P égal à la différence des longitudes de s et de Z. Nous avons vu que, en désignant par H_p l'heure de la première observation, la longitude de s est $360° - (H_p - e)$. L étant la longitude estimée de la première station, nous aurons donc

$$P = L - [360° - (H_p - e)] = L + H_p - e - 360°,$$

ou simplement $P = L + H_p - e$. Les équations du triangle PZs étant

$$\begin{aligned} \cos Zs &= \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos P, \\ \sin Zs\cos Z &= \sin\lambda\cos\delta - \cos\lambda\sin\delta\cos P, \\ \sin Zs\sin Z &= \sin\delta\sin P, \end{aligned}$$

nous poserons, comme d'habitude,

$$\cos\delta = m\cos\varphi, \quad \sin\delta\cos P = m\sin\varphi,$$

et nous aurons, pour calculer Z et Zs, les formules

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\delta\cos P, \quad \operatorname{tang} PZs = \frac{\sin\varphi\operatorname{tang}P}{\sin(\varphi-\lambda)}, \quad \operatorname{tang} Zs = \frac{\operatorname{tang}(\varphi-\lambda)}{\cos PZs}.$$

Les coordonnées du point déterminatif R sur l'horizon du point Z seront donc

$$\begin{aligned} \text{Azimut} &= 180° - Z = 180° - PZs, \\ ZR &= Zs - z. \end{aligned}$$

Si cette distance était négative, on en changerait le signe, mais on prendrait Z lui-même pour azimut du point R.

Avant de faire des calculs semblables pour la seconde observation, afin d'obtenir R', il faudra la ramener à l'horizon de la première station en appliquant la correction x à la distance zénithale z'. Les coordonnées de R' seront alors

$$180° - PZs' \text{ et } Zs' - z''.$$

Il ne restera plus qu'à porter sur une Carte marine, à côté du point estimé Z, les points rapprochés R et R', à mener les deux tangentes RT, R'T aux cercles de hauteur, ce qui revient à mener en R et R' deux perpendiculaires aux droites ZR, ZR', et à marquer leur point de rencontre T. Pour mettre le lecteur en état de comparer cette méthode à celle de Lalande sous le double rapport de la facilité des calculs et du temps employé, nous en présenterons un exemple complet sur les mêmes données.

Données.

Estime.

1er point :	λ.. 144°42',9	L.. 128°29',3	$H_p - e$.. 131°30',7	z.. 77°14',0
2e point :	λ'. 143°53',2	L'. 126°47',1	$H'_p - e'$. 203°40',9	z'. 38°45',0

$\delta = \delta'$..... 113°27',3

1° *Calcul de réduction de z' à la première station.*

Par l'estime, $\rho = 77',6$, $A' - V = 100°$, A' est relevé à la boussole.

log ρ........	1,8899	ρ....	77',6	$\rho - x$.......	1,960
log cos A' − V...	9,2397 n	x.....	−13,48	$\rho + x$.......	1,807
	1,1296 n			½...........	9,699
x approché......	− 0°.13',48	$\rho - x$.	91,1	cot z'.......	0,096
Deuxième terme..	+ 0. 1,06	$\rho + x$.	64,1	C'log 3438...	6,437
x..............	− 0.12,4				0,025
z'..............	38.45,0				+1',06
z''.............	38.32,6				

2° Calcul du premier point rapproché.

$H_p + e$.....	131°.30',7
L.........	128.29,3
	260. 0,0
	360. 0,0
Angle P....	100. 0,0 (du triangle PZ*s*)

logtang δ.	0,36263 *n*	logtang P.	0,75368 *n*	logtang(λ — φ).	0,18909 *n*
logcos P..	9,23967 *n*	logsin φ.	9,57062	logséc PZ*s*.....	0,43162 *n*
logtang φ.	9,60230	C^{t}logsin(λ — φ).	0,07594	logtang Z*s*.....	0,62071
φ........	21°48',7	logtang PZ*s*... ..	0,39964 *n*	Z*s*...........	76°31',9
λ........	144°42',9	PZ*s*...........	111°43',5	*z*....	77°14',0
λ — φ	122°54',2			Z*s* — *z*........	— 0°42',1

Le point rapproché R étant à l'opposite du Soleil, on devra le placer sur la Carte à l'ouest du méridien PZ par l'azimut ordinaire de 111°43',5.

3° Calcul du second point rapproché.

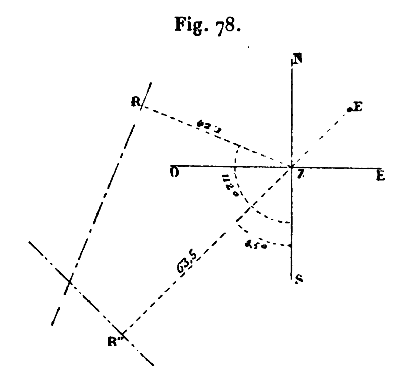
$H'_p + e'$.	203°.40',9
L.......	128.29,3
	332.10,2
	360. 0,0
P..	27.49,8 (du triangle PZ*s'*)

logtang δ.	0,36263 *n*	logtang P........	9,72256	logtang(λ — φ).	9,73624
logcos P..	9,94662	logsin φ...	9,95317	logséc PZ*s'*.. ..	0,14849
logtang φ.	0,30925 *n*	C^{t}logsin(λ — φ).	0,32020	logtang Z*s*......	9,88473
φ........	116° 8',0	logtang PZ*s'*.....	9,99593	Z*s*............	37°29',1
λ........	144°42',9	PZ*s'*...........	44°43',9	*z''*............	38°32',6
λ — φ	28°34',9			Z*s'* — *z''*.......	— 1° 3',5

Même conclusion pour R' que pour R.

4° *Opération graphique.*

Fig. 78.



Les distances 42′,1 et 63′,5 doivent être portées sur la Carte, non en vraie grandeur, mais à l'échelle des latitudes croissantes.

Évidemment cette méthode, en partie numérique, en partie graphique, est bien supérieure, comme exactitude, à la construction précédente des cercles de hauteur; mais, si on la compare à celle de Lalande (p. 298), on voit que la vieille méthode mène au but plus rapidement, avec un type familier de formules qui n'exige aucune contention d'esprit. Au fond, le calcul des éléments de correction revient identiquement à déterminer les directions des tangentes aux deux courbes de hauteur, et ce calcul se fait à trois décimales ou au quartier de réduction. On n'a nul besoin de ramener la deuxième distance zénithale à l'horizon de la première, parce qu'on ne suppose pas que la seconde courbe de hauteur soit un cercle. Enfin, s'il y avait lieu de procéder à une seconde approximation, la chose serait bien aisée avec l'ancienne méthode, tandis qu'elle serait fort pénible avec la nouvelle, puisqu'il faudrait presque tout recommencer en partant du point obtenu.

Autres manières moins exactes de construire les droites de hauteur.

La méthode précédente est basée sur ce que, la tangente à un cercle étant perpendiculaire au rayon, un point suffit pour la construire quand on a la direction du rayon. Or, au lieu de calculer l'azimut du rayon Zs, il est plus facile de relever à la boussole l'azimut du Soleil S, ce qui revient exactement au même, puisque s n'est que la projection de S sur le globe terrestre. Secondement, au lieu de calculer ZR pour avoir un point du cercle de hauteur, il est plus commode de calculer un autre point dans le voisinage et de mener par ce point une perpendiculaire à Zs, dont on a observé la direction. A la vérité, cette perpendiculaire ne sera pas exactement une tangente au cercle, mais ce sera une corde parallèle à la tangente et très voisine de cette dernière. Il n'y aura donc pas un grand sacrifice d'exactitude à prendre cette corde pour droite de hauteur.

Quant à cet autre point du cercle de hauteur qu'il faudra toujours calculer, il y a ici un certain arbitraire. Le plus simple est de porter dans l'équation du cercle

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos(L + H_p - e)$$

la valeur de la colatitude λ_1 du point estimé Z et d'en déduire une valeur L_1 de la longitude. On aura ainsi un point déterminatif à porter sur la Carte, et, à moins que l'estime ne soit très fautive, ce point sera proche du véritable point R. Il suffira donc de tracer sur la Carte une droite dans l'azimut observé de s, puis de mener par le point déterminatif une perpendiculaire à cette droite. On construirait de même la seconde droite de hauteur, et, par suite, on aurait, à leur intersection, la position occupée par le navire à l'heure H_p de la première observation.

Si la longitude estimée était mieux connue que la colatitude, il y aurait avantage à la porter dans l'équation du cercle à la place de L, et l'on en déduirait une valeur correspondante de λ à l'aide d'un angle auxiliaire φ. Les valeurs ainsi trouvées pour

λ et L seraient les coordonnées d'un autre point du cercle de hauteur, plus ou moins voisin, comme le premier, du vrai point déterminatif R, et l'on s'en servirait pour construire une droite de hauteur. Mais, en opérant ainsi, on ne sait pas bien ce qu'on fait et sur quoi l'on est en droit de compter. Nous ne nous arrêterons donc pas davantage à ces procédés; mais, avant de quitter ce sujet, il sera bon de faire ici l'historique de ces droites de hauteur, pour montrer dans quel cas elles peuvent réellement rendre service.

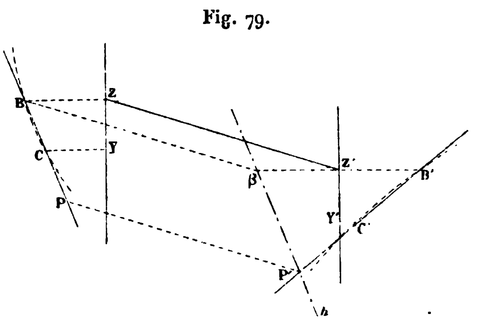
Droites de hauteur du capitaine Sumner.

Ce capitaine se trouvait en 1837 près de la côte d'Irlande (à destination de Greenock) sans avoir pu faire d'observation astronomique depuis qu'il avait dépassé le méridien de 318°30'. Dans la nuit du 17 décembre, le vent ayant passé au sud-est et l'estime donnant 400 milles du phare de Tuscan, avec la terre sous le vent, il gouverna est-nord-est, serrant le vent le plus possible. Quand le jour parut, rien n'était encore en vue. Vers $10^h 30^m$ seulement, le commandant put prendre une hauteur du Soleil. Avec le chronomètre (un bon instrument), il calcula sa longitude et trouva 339°43'; mais, comme il avait fait près de 700 milles sans une seule observation, la colatitude employée dans le calcul de l'heure ne méritait aucune confiance. Pour apprécier l'effet d'une erreur possible en colatitude, il calcula encore deux autres longitudes, en partant chaque fois d'une colatitude de 10' moins grande. Les trois points ainsi obtenus ayant été marqués sur la Carte, Sumner remarqua qu'ils se trouvaient sur une même droite dirigée est-nord-est et aboutissant au bateau-phare de Small, et comme son vaisseau devait se trouver sur cette droite (bien entendu dans la supposition d'une erreur nulle pour le chronomètre), la route est-nord-est fut maintenue, et le capitaine Sumner eut la satisfaction de se voir bientôt en vue du phare de Small.

Plus tard, le capitaine américain vit qu'il y avait là un moyen simple de résoudre le problème de Douwes. Supposons-nous

en pleine mer. La droite de hauteur fournie par une observation unique, loin des côtes, n'aura plus d'intérêt; mais, si le navigateur réussit à obtenir une seconde observation à un intervalle suffisant de la première, il n'aura qu'à calculer de la même manière une seconde droite de hauteur sur laquelle le navire devra se trouver tout comme sur la première, et il n'y aura plus qu'à marquer leur point d'intersection. Ces droites ne seront pas des tangentes aux cercles de hauteur, mais des sécantes tout aussi aptes que les premières à remplacer ces courbes.

Fig. 79.



ZY étant le méridien du point estimé et Z ce point lui-même, on calcule par l'équation (1) la longitude L_1, qui répond, sur le cercle de hauteur, à la colatitude λ_1 du point Z. On obtient ainsi, par un simple calcul d'angle horaire, la longitude d'un point B de ce cercle de hauteur. Puis on augmente de 10′ ou de 20′ la colatitude du point Z, et l'on calcule pour le parallèle YC la longitude L_2 d'un second point C du même cercle. BC sera la droite de hauteur du capitaine Sumner.

On opère de même pour le second cercle de hauteur, dont l'équation est

$$\cos z' = \cos\lambda' \cos\delta' + \sin\lambda' \sin\delta' \cos(L + H'_p - e' + \Delta L),$$

c'est-à-dire on donne à λ' pour première valeur la colatitude estimée à la seconde station λ'_1 et pour seconde valeur λ'_2 cette colatitude augmentée de 10′ ou de 20′. On détermine ainsi deux points B′ et C′ du second cercle de hauteur, et l'on trace la

sécante B′C′ sur la Carte. Dans l'intervalle $H'_p - H_p$ des observations, le navire a décrit un arc de loxodromie dont les éléments sont v et V. Il faut donc, pour trouver les positions du navire à l'instant de la première et de la seconde observation, insérer entre les droites de hauteur BC, B′C′ une ligne droite de longueur v et d'azimut V, c'est-à-dire égale et parallèle à ZZ′. On mènera par un point quelconque B de la première une droite $B\beta$ égale et parallèle à ZZ′, et par le point β une parallèle βh à BC qui coupe $\beta'C'$ en P′. En menant P′P parallèle à ZZ′, ces deux droites seront égales et les points P, P′ seront les lieux du navire aux heures H_p et H'_p. On se dispense ainsi de ramener la seconde distance zénithale à l'horizon de la première.

Tel est le procédé des droites de hauteur qui a été proposé par le capitaine Sumner. Il est plus simple que tout ce qu'on a imaginé après lui. Mais, si on le compare à la solution ordinaire des équations du problème par parties proportionnelles (p. 294), il est facile de voir que, au moment où l'on a calculé pour ces deux droites les quatre points B, C, B′, C′ qui les déterminent, on a suivi identiquement la même marche que par l'ancienne méthode, et fait plus des neuf dixièmes du travail exigé, car il ne resterait plus qu'à calculer une quatrième proportionnelle aux nombres $\lambda_1 - \lambda'_1$, $L_1 - L_2$, $L'_1 - L'_2$. Or la construction graphique du capitaine Sumner équivaut précisément à celle de cette quatrième proportionnelle, plus les erreurs attachées à l'usage de la règle et du compas. Il n'y a donc là, quand on envisage uniquement le résultat, aucune idée nouvelle, aucune économie de temps ou de calcul, mais un résultat moins exact.

Utile application des droites de hauteur au lever sous voiles.

On comprend bien que les personnes à qui le calcul répugne aiment à lui substituer une construction graphique comme celle que nous avons donnée plus haut, mais l'emploi des droites de hauteur exige tout autant de calcul que les anciennes méthodes; nous ne saurions donc les considérer comme un

progrès réel destiné à soulager les marins à qui incombent tant de devoirs et d'obligations variées, puisqu'elles se réduisent en dernière analyse à remplacer par une construction géométrique le mince calcul d'une règle de trois. Mais, à un tout autre point de vue, la considération des droites de hauteur rendra de véritables services dans le cas très particulier où il s'agit d'atterrir avec une observation incomplète, c'est-à-dire avec une seule mesure de distance zénithale, et c'est précisément le cas où s'est trouvé, en 1837, le capitaine Sumner. Avec les méthodes ordinaires, cette unique distance donne seulement une relation numérique entre les deux corrections de λ et de L, tandis que, traçant sur la Carte la droite de hauteur correspondante, il peut arriver que cette droite rencontre sur la côte un point remarquable, ou qu'elle coupe à peu de distance les lignes d'égale profondeur de la mer que les hydrographes tracent sur leurs Cartes. Dans ce second cas, un simple coup de sonde permettra de marquer sur cette droite la position réelle du navire.

En dehors de ces cas bien particuliers, l'usage des droites de hauteur paraît devoir être réservé au lever sous voiles, pour lequel il a été effectivement recommandé dès l'origine par M. de Tessan, à l'occasion de son voyage de circumnavigation à bord de la *Vénus* en 1836-1838, sous le commandement de M. Dupetit-Thouars. Je transcris ici les pages instructives, mais un peu oubliées, du savant hydrographe :

« On recommande généralement, dans les instructions sur les levers sous voiles, *de se placer est et ouest des points dont on veut déterminer la latitude, et nord et sud de ces mêmes points quand on veut en déterminer la longitude*. Cette dernière prescription n'est cependant pas la meilleure, car elle laisse subsister dans la détermination des points une partie de l'erreur de l'estime. On devrait recommander *de se placer toujours de manière que la hauteur de l'astre observé soit la même à bord que sur le point dont on veut déterminer la position.*

» La raison de cette règle est facile à saisir. En effet, sup-

posons, par exemple, que l'astre observé soit le Soleil : les montres, en donnant l'heure de Paris pour l'instant de l'observation, font connaître le point du globe qui, dans cet instant, a le Soleil à son zénith. Si de ce point comme centre, avec un rayon égal au complément de la hauteur observée (distance du Soleil au zénith de l'observateur), on décrit sur le globe un cercle, la position de l'observateur devra nécessairement se trouver quelque part sur ce cercle, qui contient tous les points pour lesquels la hauteur du Soleil, à l'instant donné, était égale à la hauteur observée. (L'observation de la hauteur d'un astre ne donne rien de plus ni rien de moins que le rayon d'un cercle semblable, dont les montres et la *Connaissance des Temps* font connaître le centre). Mais, si notre prescription est remplie, le point à déterminer devra se trouver aussi sur ce même cercle. Et l'intersection de deux cercles semblables donnera évidemment la position cherchée du point, et cela indépendamment de toute erreur sur la position du bâtiment provenant de l'estime, et aussi quelles que soient les heures des deux observations, pourvu que leur intervalle soit assez grand pour que les deux cercles se coupent sous un angle suffisamment bon.

» On se trouve évidemment alors dans le même cas que si l'on avait fait les deux observations sur le point même dont on veut déterminer la position, et des formules rigoureuses données dans tous les Traités de navigation font connaître alors la latitude et la longitude du point cherché.

» Ces formules rigoureuses étant toutefois peu familières aux marins, qui ont bien rarement l'occasion d'en faire usage, il est plus simple et tout aussi exact, dans la pratique, de calculer à l'ordinaire (avec un élément estimé) la position du bâtiment et de tracer ensuite sur la Carte les relèvements pris sur le point à déterminer, car il est facile de voir que l'intersection de ces relèvements diffère excessivement peu du point d'intersection des cercles eux-mêmes et varie excessivement peu, même pour une erreur considérable dans l'élément estimé qui entre dans les calculs. En effet, ces deux relèvements, étant les cordes

d'arcs très petits pris sur les deux cercles dans le voisinage de leur point commun d'intersection, se coupent nécessairement toujours très près de ce point d'intersection, quelles que soient, du reste, les petites variations de position que puissent subir les deux petits arcs sur les cercles.

» On voit tout de suite que, d'après notre prescription, le point à déterminer se trouvera toujours, par rapport à l'observateur, dans un azimut à très peu près perpendiculaire au vertical du Soleil, puisque ce point est toujours à peu de distance de l'observateur, sur un même arc de petit cercle dont l'azimut du Soleil est le rayon. L'expression de l'angle azimutal compris entre le vertical du Soleil et le point est donnée par la formule

$$\cos A = \operatorname{tang} \frac{D}{2} \operatorname{tang} H,$$

dans laquelle A est l'angle voulu, H la hauteur du Soleil, D la distance du point à l'observateur.

» L'arc D n'étant jamais que d'un petit nombre de minutes, on voit que l'angle A sera généralement très peu différent de 90° et qu'on pourra, dans la pratique, le prendre toujours égal à 90°, sans avoir recours à la formule précédente, à moins toutefois que la hauteur H du Soleil ne diffère elle-même très peu de 90°, c'est-à-dire à moins que le Soleil ne se trouve près du zénith au moment de l'observation.

» En suivant notre prescription, tous les instants de la journée sont bons pour déterminer la position d'un point; il n'est plus nécessaire d'attendre l'heure favorable aux angles horaires et l'heure de midi : il suffit que les cercles ou les relèvements se coupent suffisamment bien, et pour cela il suffit que l'intervalle des observations soit compris entre quatre et huit heures environ.

» Dans les observations faites à l'instant même de midi pour déterminer la latitude par la hauteur méridienne, comme il n'entre aucun élément estimé dans le calcul, on devra se placer toujours est et ouest du point à déterminer, quelle que soit la hauteur du Soleil et lors même qu'elle approche beaucoup de

90°, ce qui rentre, du reste, dans notre règle générale de se placer toujours, par rapport au point à déterminer, de manière à le relever dans un azimut perpendiculaire à celui du Soleil.

» En partant des mêmes considérations qui nous ont guidé dans l'établissement de ce principe général, on voit que, pour déterminer la position du navire le plus exactement possible et indépendamment de toute erreur d'estime au moyen d'une hauteur du Soleil et d'un relèvement pris sur un point connu de position, il faut se placer de manière à relever ce point connu dans l'azimut même du Soleil ou à 180°, car alors le relèvement coupe à angle droit le cercle de position donné par la hauteur observée. »

DÉTERMINATION ASTRONOMIQUE

DE L'HEURE DE PARIS.

CHAPITRE XXXV.

PROBLÈME DES LONGITUDES EN GÉNÉRAL.

Puisque la longitude d'un lieu par rapport à un autre est égale à la différence des heures que l'on compte au même instant dans ces deux lieux, la question se réduit à transmettre l'heure du premier au second et à noter la différence. Le moyen le plus parfait pour cette transmission est d'employer la télégraphie électrique et les câbles qui traversent aujourd'hui les continents ou les mers. Désignons par A et B ces deux lieux, L l'excès de la longitude de B sur celle de A, x le temps que l'électricité emploie pour franchir cette distance. Si à l'heure H_b du premier on envoie un signal en A, où on le reçoit à l'heure H_a, les deux heures locales H_b et $H_a - x$ répondront au même instant, et l'on aura pour différence des longitudes

$$L = H_b - (H_a - x).$$

Pour éliminer la durée x, il suffit de renverser le courant électrique et d'envoyer l'heure de A en B. Soient H'_a l'heure signalée en A, H'_b l'heure de B à l'instant où le signal H'_a lui parvient : H'_a et $H'_b - x$ seront contemporaines, et l'on aura

$$L = H'_b - x - H'_a.$$

La demi-somme de ces deux déterminations de L donne L indépendamment de x; leur demi-différence donne x. En opérant ainsi, par un grand nombre de signaux électriques, la comparaison de deux pendules exactement réglées, l'une sur le temps moyen ou sidéral de A, l'autre sur le temps moyen ou sidéral de B, donnera L à quelques centièmes de seconde près.

Le ciel présente des signaux instantanés visibles à la fois sur tout un hémisphère et servant, au même titre, à déterminer les longitudes. En première ligne, il faut citer les éclipses des satellites de Jupiter. Celles des deux premiers sont assez fréquentes; on les observe à terre avec une certaine précision : il suffit que le ciel soit également beau aux diverses stations et que les observateurs se servent de lunettes de même force. Mais ce moyen est inapplicable en mer, car il exige un grossissement assez fort et par conséquent un instrument fixe. Les éclipses de Lune sont de même nature; seulement le phénomène manque de netteté et ne saurait être observé avec précision. Il est d'ailleurs beaucoup trop rare.

Le ciel nous offre une autre catégorie de phénomènes parfaitement utilisables en mer. La Lune, en effet, est comme l'aiguille d'une horloge, marquant sur les méridiens célestes les heures d'un temps absolu, indépendant du mouvement diurne, le même pour tous les lieux du monde, quels que soient les méridiens terrestres sur lesquels ils se trouvent placés. Nous disons temps absolu, indépendant du mouvement diurne : en effet, pour le temps local, dont l'unité est la durée de la rotation terrestre, l'origine du jour est fixée en chaque lieu au moment où, en vertu de la rotation de la Terre, un certain point du ciel passe au méridien terrestre de ce lieu; ici, au contraire, nous plaçons l'origine du temps au moment où la Lune, en vertu de son mouvement propre, passe par le méridien céleste de 0^h d'ascension droite, phénomène entièrement indépendant du mouvement diurne et des heures locales. Cet instant est le même pour tous les points de la Terre. Comme la Lune revient au méridien de départ en $27^j\frac{1}{3}$, l'unité de temps dans ce système aurait justement cette durée, et un instant

absolu quelconque sera déterminé par l'Æ correspondante de la Lune, tout aussi bien que par une éclipse de satellite de Jupiter. Si donc nous voulons comparer les heures (relatives au mouvement diurne) que l'on compte au même instant absolu en deux lieux de notre globe, il suffit de prendre les heures où, en ces deux points, on aura observé la Lune par la même ascension droite.

La manière la plus exacte de déterminer l'Æ de la Lune en un lieu quelconque est d'observer l'heure sidérale H_s de son passage au méridien; on a alors Æ $= H_s$. Supposons donc qu'en deux lieux B et A on ait observé les heures H_{sb} et H_{sa} du passage de la Lune au méridien. Désignant toujours par L l'excès de la longitude de B sur celle de A, nous aurons, pour l'espace de temps absolu compté entre les deux observations,

$$H_{sa} - (H_{sb} - L).$$

Dans cet intervalle de temps, l'Æ de la Lune augmente (en désignant par m sa variation pour 1^s) de

$$m(H_{sa} - H_{sb}) + mL.$$

Or cette augmentation n'est autre chose que $H_{sa} - H_{sb}$ (¹), puisque H_{sb} et H_{sa} sont précisément les ascensions droites déterminées en B et A. On aura donc l'équation

$$m(H_{sa} - H_{sb}) + mL = H_{sa} - H_{sb},$$

d'où

$$L = (H_{sa} - H_{sb})\left(\frac{1-m}{m}\right).$$

La quantité m, la seule qu'on emprunte ici aux Tables de la Lune, est toujours connue avec une exactitude suffisante. Si l'on représente par ε l'erreur probable de l'observation du passage de la Lune au méridien, on aura pour l'erreur de la longitude ainsi mesurée

$$dL = \pm \varepsilon\sqrt{2}\left(\frac{1-m}{m}\right).$$

(¹) Nous supposons que B est la plus orientale des deux stations.

En prenant 1^s de temps moyen pour unité, la variation moyenne de l'Æ de la Lune est, à raison de 360° ou 1 296 000″ pour $27^j,3 \times 86\,400^s$, de 0″,55 ou de $0^s,0358$ par seconde. Pour 1^s de temps sidéral, on aura $m = 0^s,0357$. Le facteur $\frac{1-m}{m}$ est donc égal à 27, en moyenne; par suite,

$$dL = \pm 27\varepsilon\sqrt{2}.$$

Or ε, dans les observations du passage de la Lune au méridien, est de $0^s,1$ à peu près. Ce genre d'observation donnera donc la longitude à 4^s près, mais on obtient plus de précision en réitérant ces observations un grand nombre de fois. C'est par ce procédé que, sur la demande du Bureau des Longitudes, des officiers de notre marine ont déterminé, avec un plein succès, les longitudes d'un certain nombre de points fondamentaux pour la navigation, dans des régions fréquentées où n'aboutissent pas encore les câbles électriques. Ils ont observé en chacun d'eux un grand nombre de passages méridiens de la Lune et ont trouvé, dans les divers observatoires d'Europe et des États-Unis, les observations correspondantes dont ils avaient besoin pour obtenir les différences de longitude.

En mer, il est impossible d'observer les passages de la Lune au méridien, mais on détermine aisément l'Æ de cet astre au moyen de simples distances zénithales. De même on ne saurait, en mer, se procurer des observations correspondantes faites en quelque autre point du globe dont la longitude serait déjà connue; mais les Æ de la Lune, calculées par le Bureau des Longitudes, plusieurs années d'avance, pour toutes les heures de chacun des jours de l'année en temps moyen de Paris, peuvent y suppléer. En comparant l'Æ de la Lune obtenue en mer, à l'heure H du bord, avec les Æ de la *Connaissance des Temps* calculées pour le méridien de Paris, on aura par une simple interpolation l'heure de Paris H_p correspondante, et la longitude s'en déduira immédiatement. Nous allons exposer tout d'abord cette méthode.

Longitude par la distance zénithale de la Lune.

Soient z_1 la distance zénithale observée à l'heure H du bord, z la distance zénithale corrigée de la réfraction et de la parallaxe. Avec la longitude estimée, on tire de la *Connaissance des Temps,* pour l'heure de Paris $H_p = H - L$, les quantités nécessaires au calcul de l'ascension droite, c'est-à-dire δ, P, $\frac{1}{2}\Delta$ et l'heure sidérale du bord H_s. On a Æ par

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos \text{Æ},$$

puis Æ par la relation

$$H_s = \text{Æ} + \text{Æ}.$$

Avec cette Æ on trouve dans la *Connaissance des Temps,* par interpolation simple, l'heure de Paris H'_p; la différence $H'_p - H_p$ donne l'erreur des chronomètres et $H - H'_p$ donne la longitude. Si l'erreur de la longitude estimée était notable, surtout à l'époque où δ varie rapidement, on regarderait H'_p comme une première approximation, et l'on recommencerait le calcul à l'aide de nouvelles valeurs de δ, P, $\frac{1}{2}\Delta$ recalculées pour l'heure H'_p.

Avant d'entrer dans la *Connaissance des Temps* avec l'Æ conclue, on aura soin d'appliquer à celle-ci, en signe contraire, la correction qu'exigent actuellement les Tables lunaires. En 1878, par exemple, les Æ tabulaires de la Lune sont trop fortes de $0^s,80$; il faudra ajouter $0^s,8$ à l'Æ observée à bord pour la rendre comparable avec celles de la *Connaissance des Temps.*

Exemple. — *Le 2 juin 1878, par* $\lambda = 45$ *et* $L = 22^h$, *on a observé, à* 4^h *temps moyen du navire, le bord inférieur de la Lune;* $\zeta_1 = 36°17',9$, bar. $= 0^m,760$, $t = +10°$. *L'heure et la colatitude ont été bien déterminées par des observations faites peu de temps auparavant. On demande la longitude, que l'estime seule porte à* 22^h.

Réunissons d'abord les formules :

Bord inférieur :
$$\begin{aligned}
\zeta &= \zeta_1 + \rho,\\
z &= \zeta - \mathrm{P.N}\sin\zeta - \tfrac{1}{2}\Delta,\\
\delta' &= \delta - \mathrm{P.ON}\sin\delta,\\
\cos z &= \cos\lambda\cos\delta' - \sin\lambda\sin\delta'\cos \mathrm{AH},\\
\mathrm{AR} &= \mathrm{H}_s - \mathrm{AH}.
\end{aligned}$$

Voici les données de l'observation :

$$\lambda = 45^\circ,\quad \mathrm{L} = 22^{\mathrm{h}},\quad \mathrm{H} = 4^{\mathrm{h}},\quad \mathrm{H}_p = 6^{\mathrm{h}},$$

$$\zeta_1 = 36^\circ 17' 53'',7 \quad \begin{cases} b = 0^{\mathrm{m}},760,\\ t = +10^\circ.\end{cases}$$

Voici les données tirées de la *Connaissance des Temps* et de la Table II de cet Ouvrage :

δ.......	63°7'35",4	H_s....	8^h44^m14^s,79	N......	1,00170
P......	0.57.23,3	AR........... ...	6.10.50,75	ON....	0,00481
$\frac{1}{2}\Delta$.....	0.15.39,8	Err. des Tables...	+0. 0. 0,80	P.ON..	0'16",6
ρ.......	0. 0.42,8	Mouv. hor. en AR.	0. 0. 2,49	P.N...	57'29",1

Voici le calcul de AR et de la longitude :

$\zeta_1+\rho=\zeta$.	36°18'36",5	log sin ζ.	9,77244	log sin δ..	9,950
p.........	− 0.34. 2,4	log P.N..	3,53771	log P.ON.	1,219
$\frac{1}{2}\Delta$.......	− 0.15.39,8	log p....	3,31015		1,169
z.........	35.28.54,3				0°0'14",8
				δ........	63°7'35",4
				δ'.....	63°7'20",6

σz.......	0,1856996	log diff.....	9,1338419	AH.....	2^h33^m24^s,27
$\sigma(\delta-\lambda)$..	0,0496058	C^t log sin λ..	0,1505150	H_s...	8.44.14,79
Diff......	0,1360938	C^t log sin δ'.	0,0496477	AR.....	6.10.50,52
		log σ AH....	9,3340046	*C. d. T.*	6.10.49,95
				Diff.....	0. 0. 0,57

log diff.......	9,756
log 2^s,49...	0,396
	9,360
log 60........	1,778
	1,138
Nombre......	13^s,7

Ainsi, l'heure de Paris donnée par les chronomètres doit être augmentée de $13^s,7$ et la longitude estimée doit être diminuée d'autant.

Pour apprécier le degré de précision dont cette méthode est susceptible, remarquons que, l'Æ conclue étant la différence entre l'heure sidérale du lieu et l'angle horaire de la Lune, il suffira de considérer les erreurs probables de ces deux quantités, qui toutes deux dérivent d'observations zénithales. Si celles-ci ont été faites non loin des azimuts de 90° ou de 270°, l'erreur provenant de la colatitude sera négligeable; il n'y aura à considérer que l'erreur dz des z mesurés. En désignant par A et A′ les azimuts des deux observations faites l'une pour l'heure, l'autre pour l'Æ de la Lune, l'erreur de l'heure sera $\pm \frac{dz}{15 \sin A \sin \lambda}$, et celle de Æ, $\pm \frac{dz'}{15 \sin A' \sin \lambda}$. Admettons le cas le plus favorable, où $A = A' = 90°$ et $dz = dz' = 0',2$; l'erreur de Æ sera

$$\frac{0',2 \times \sqrt{2}}{15 \sin \lambda} = 1^s,6.$$

Lorsqu'il s'agira de conclure la longitude de l'Æ observée, cette erreur prendra le facteur $\frac{60}{2,49}$, car la variation de l'Æ de la Lune à la date indiquée est de $2^s,49$ pour 60^s de temps et deviendra $\pm 38^s$. Ce degré de précision est peu élevé; il n'est pourtant pas à dédaigner, car il donne la position du navire en longitude à $0',2 \times \sqrt{2} \times \frac{60}{2,49} = 7'$ près.

Ce procédé se prête à la réitération des mesures, et une partie des erreurs constantes, notamment celles qui affectent la dépression et l'instrument, s'éliminent d'elles-mêmes dans la différence des angles horaires. Néanmoins, nous avons admis des circonstances favorables difficiles à réunir; cette méthode n'a donc pas, en général, la précision requise : aussi n'a-t-elle jamais été appliquée jusqu'ici. Celle des distances lunaires, que nous allons exposer, est bien préférable, quoique les calculs soient plus compliqués. On y rem-

place la coordonnée Æ de la Lune par sa distance angulaire à un autre astre bien connu et placé à peu près sur le chemin qu'elle parcourt sur la sphère céleste.

CHAPITRE XXXVI.

DISTANCES LUNAIRES.

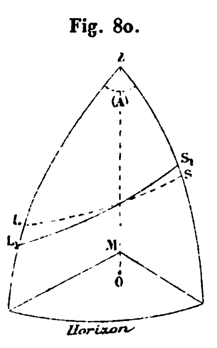
L'observateur, maintenant le sextant dans le plan des deux astres, pointe sur l'un d'eux avec la lunette et amène dans le champ l'image doublement réfléchie de l'autre. Les deux images étant placées entre les fils parallèles au limbe, on met les deux disques en contact par leurs bords et l'on note l'heure. Il y a là une condition essentielle : c'est d'affaiblir l'image la plus brillante par l'interposition de verres obscurcissants, de manière à les ramener toutes deux à la même intensité. Alors le contact des deux bords du Soleil et de la Lune s'effectue avec une véritable précision. Si au lieu du sextant on emploie le cercle de Borda, la mesure de la distance sera indépendante de toute excentricité; par des observations croisées, on élimine l'erreur d'origine des divisions, c'est-à-dire du point de parallélisme des miroirs; par la répétition, on supprime les erreurs de division et l'on atténue celle du pointé. Néanmoins, c'est là la plus difficile de toutes les observations astronomiques; il faut une adresse particulière et une grande habitude pour maintenir les deux astres dans le champ de la lunette malgré les oscillations du navire. Dans les circonstances favorables, on parvient à déterminer l'heure de Paris à une quinzaine de secondes près, résultat merveilleux si l'on songe que la position du navire en longitude est déterminée par là à moins de $4' \sin\lambda$, et si l'on considère la variété des ressources que l'Art et la Science ont

dû réunir pour arriver à la solution de ce grand problème des longitudes à la mer.

Théoriquement, la seule difficulté de cette méthode consiste en ce que les distances lunaires, observées à la surface de la Terre, ne sont pas directement comparables à celles de la *Connaissance des Temps,* qui sont calculées pour le centre de notre globe. Il faut donc les ramener à ce point par un changement d'origine dans les coordonnées, et en tenant compte de la réfraction. En outre, l'observation donne la distance des bords, tandis que la *Connaissance des Temps* donne celle des centres. De là une nouvelle réduction, qui consiste à ajouter, à la distance des bords, les demi-diamètres apparents des deux astres, en tenant compte de l'effet particulier de la réfraction.

Soient donc ∂_1 cette distance des centres observée d'un point M de la surface, z_1 et z'_1 les distances zénithales apparentes des deux astres S et L telles qu'on les observerait du même point M, (A) leur différence d'azimut, Z le zénith en M, et construisons le triangle sphérique Z$S_1$$L_1$, dont les sommets seront les pro-

Fig. 80.



jections des deux astres et du zénith sur la sphère céleste. Si l'on passe du point M au point O, situé (en supposant la Terre sphérique) sur la verticale MZ, les astres ne sortiront pas de leurs verticaux primitifs Z ML_1, Z MS_1, et se projetteront seulement en d'autres points L et S sur les côtés ZL_1, ZS_1 de ce triangle. Leur distance L_1 S_1, vue du point M, que nous désignerons par ∂_1, deviendra la distance LS vue du centre de la

Terre, distance que nous désignerons par ∂. Dans le premier cas, les côtés ZL_1, ZS_1 du premier triangle seront les distances zénithales apparentes des deux astres, affectées de la réfraction; dans le second triangle, les côtés ZL, ZS en seront les distances vraies et géocentriques. Ces deux triangles, qui ont l'angle (A) commun, nous donnent

$$(1) \qquad \cos\partial_1 = \cos z_1 \cos z'_1 + \sin z_1 \sin z'_1 \cos(A),$$

$$(2) \qquad \cos\partial = \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \cos(A).$$

Les distances zénithales z, z', z_1, z'_1 sont connues; il suffira donc d'éliminer cos(A) entre ces deux équations pour avoir ∂, c'est-à-dire la distance géocentrique des deux astres, celle qu'on doit comparer aux distances calculées d'avance dans la *Connaissance des Temps* pour obtenir l'heure de Paris.

Évidemment la difficulté de ces calculs ne gît pas dans la combinaison des équations (1) et (2), bien plus faciles à résoudre que celles du problème de Douwes, mais dans le détail des corrections de réfraction et de parallaxe qu'il faut appliquer ici. Nous allons voir, en effet, que ces corrections doivent être obtenues avec plus de précision qu'on n'en apporte d'ordinaire dans les calculs d'Astronomie nautique, et qu'on ne saurait se dispenser d'y tenir compte de l'aplatissement du globe terrestre.

Conditions d'exactitude.

Notre attention doit se porter en premier lieu sur l'erreur commise dans la mesure de ∂_1. En différentiant (1) et (2) par rapport à ∂, ∂_1 et (A), puis en divisant les résultats membre à membre, on trouve

$$d\partial = \frac{\sin z \sin z'}{\sin z_1 \sin z'_1} \frac{\sin\partial_1}{\sin\partial} d\partial_1.$$

Pour le Soleil, dont la parallaxe est très faible, la réfraction l'emporte sur la parallaxe; aussi avons-nous placé S au-dessous de S_1 dans la figure précédente (c'est l'inverse pour la Lune).

Le rapport $\frac{\sin z}{\sin z_1}$ est donc plus grand, mais à peine différent de l'unité. De 10° à 70° de distance zénithale, il varie de 1,000254 à 1,000257. Le rapport analogue pour la Lune est plus petit que 1 et varie de 1 à 0,982. Il en est de même de $\frac{\sin \partial_1}{\sin \partial}$, et sa variation est encore plus faible. Concluons de là qu'une petite erreur $d\partial_1$ commise dans la mesure de la distance apparente se reportera avec son signe et presque sans altération (tout au plus de un ou deux centièmes) sur la distance conclue ∂. Si donc on négligeait, au commencement du calcul, d'apporter quelque petite correction à ∂_1, il serait permis de l'appliquer après coup à ∂.

Considérons en second lieu les erreurs des distances zénithales; pour cela, exprimons $\partial - \partial_1$ en fonction des différences $z - z_1$, $z' - z'_1$, et, pour abréger, désignons-les par les lettres x, α, α'. Remplaçons, dans l'équation (2), ∂, z, z' par $\partial_1 + x$, $z_1 + \alpha$, $z'_1 + \alpha'$; développons les sinus et cosinus en traitant x, α, α' comme de petites quantités dont les cosinus peuvent être remplacés par 1 et les sinus par les arcs correspondants. Il viendra ainsi

$$\begin{aligned}\cos\partial_1 - x\sin\partial_1 = {} & (\cos z_1 - \alpha \sin z_1)(\cos z'_1 - \alpha' \sin z'_1) \\ & + (\sin z_1 + \alpha\cos z_1)(\sin z'_1 + \alpha'\cos z'_1)\cos(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

Effectuons les multiplications en omettant les carrés et les produits deux à deux de x, α, α'. Après avoir supprimé les termes qui se détruisent en vertu de l'équation (1), on aura

$$\begin{aligned}x\sin\partial_1 = {} & \alpha\,[\sin z_1 \cos z'_1 - \cos z_1 \sin z'_1 \cos(\mathrm{A})] \\ & + \alpha'[\sin z'_1 \cos z_1 - \cos z'_1 \sin z_1 \cos(\mathrm{A})].\end{aligned}$$

Or le triangle $\mathrm{ZS_1L_1}$ donne

$$\begin{aligned}\sin\partial_1 \cos \mathrm{S}_1 &= \sin z_1 \cos z'_1 - \cos z_1 \sin z'_1 \cos(\mathrm{A}), \\ \sin\partial_1 \sin \mathrm{L}_1 &= \sin z'_1 \cos z_1 - \cos z'_1 \sin z_1 \cos(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

La relation précédente se réduit donc à

$$x = \alpha \cos \mathrm{S}_1 + \alpha' \cos \mathrm{L}_1.$$

Ainsi la réduction x de la distance apparente à la distance géocentrique dépend uniquement de α et de α', c'est-à-dire des corrections de réfraction et de parallaxe $z - z_1$, $z' - z'_1$, et elle est moindre que leur somme. Toute erreur portant sur z et z_1 à la fois, ou sur z' et z'_1, sera sans influence, à moins qu'elle ne soit assez grande pour fausser notablement les angles L_1 et S_1, ce qui est inadmissible. Il faut donc calculer avec soin les corrections susdites de réfraction et de parallaxe, et ne pas oublier que toute erreur finale commise sur ∂ se reportera sur la longitude conclue avec le facteur 27 s'il s'agit d'une distance de la Lune à une étoile et le facteur 29 s'il s'agit d'une distance luni-solaire. Mais on comprend en même temps la supériorité de cette méthode sur la précédente (p. 328), car il n'y a ici qu'une seule erreur d'observation dont l'effet soit agrandi par le facteur 27, à savoir l'erreur de ∂_1, mesure où l'on atteindra la précision de 0',1 par le cercle de Borda.

Cette même relation conduit à deux autres conséquences importantes. La première est qu'il n'est pas nécessaire de mesurer les distances zénithales apparentes z_1 et z'_1 des deux astres : il suffit de les calculer avec les éléments de l'estime (à moins que le Soleil ne soit bien placé pour donner l'heure du bord). Lorsqu'on se décide à les observer, il faut qu'elles répondent à l'instant où l'on mesure la distance ∂_1. Trois observateurs sont alors nécessaires pour déterminer, en même temps, l'un la distance et les deux autres les hauteurs. S'il n'y a qu'un seul observateur, il devra mesurer les hauteurs une première fois, puis la distance, enfin les deux hauteurs une seconde fois, afin que la moyenne des hauteurs soit sensiblement contemporaine de la distance. Mais comme la partie délicate est toujours l'observation, il faut avant tout simplifier celle-ci, et nous supposerons, dans cette étude, que les efforts de l'observateur se sont concentrés exclusivement sur la mesure de la distance. Nous calculerons donc z et z', z_1 et z'_1.

La seconde conséquence est que la distance ∂_1 n'a besoin d'aucune correction lorsque les angles L_1, S_1 du triangle ZL_1S_1 sont à peu près droits. On aura alors l'heure de Paris sans

calcul, en comparant immédiatement cette distance à celles de la *Connaissance des Temps*. C'est ce que le commandant Richard nommait des *équidistances*, voulant dire par là que les distances lunaires, mesurées dans ces conditions, étaient égales aux distances géocentriques. Il allait même plus loin et faisait remarquer que, même dans le cas où S_1 serait très différent d'un droit, la correction $\alpha' \cos S_1$ ne dépasserait pas $1'$, à moins d'une distance zénithale du Soleil plus grande que 60°, et qu'alors on aurait, sans calcul, la longitude à 29′ près, ce qui serait encore bien heureux pour les navires de commerce, qui, souvent, ignorent absolument leur longitude. En réalité, les deux angles L_1 et S_1 ne peuvent guère être droits tous les deux, car l'astre de comparaison est généralement pris sur la trajectoire apparente de la Lune, laquelle est plus ou moins inclinée sur l'horizon; toujours est-il que l'on doit signaler comme une circonstance éminemment favorable le cas où l'angle L_1 serait assez peu éloigné de 90°. L'inverse serait celui où les deux astres seraient vus dans le même azimut; alors la correction de ∂_1 atteindrait son maximum $\alpha + \alpha'$, c'est-à-dire la somme des parallaxes moins celle des réfractions.

Correction de réfraction à appliquer au demi-diamètre apparent.

C'est ce qu'on nomme l'accourcissement du demi-diamètre réfracté. Ce qu'on mesure, c'est la distance des bords de l en s; on en conclut celle des centres $L_1 S_1 = \partial_1$. La réfraction transformant les disques circulaires du Soleil et de la Lune en ellipses plus ou moins aplaties, le rayon $S_1 s$ n'est plus le demi-diamètre angulaire du Soleil $\frac{1}{2}\Delta_1$, mais bien

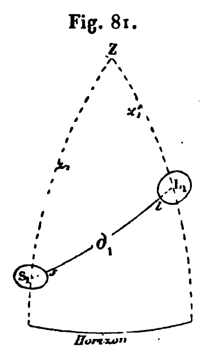
$$\tfrac{1}{2}\Delta_1 (1 - d\rho \cos^2 S_1),$$

comme nous l'avons vu au Chapitre de la réfraction (p. 71), en négligeant α, et en désignant par S_1 l'angle en S_1 du triangle $Z_1 L_1 S_1$. De même pour la Lune, $\frac{1}{2}\Delta'_1$ devra être remplacé par

$$\tfrac{1}{2}\Delta'_1 (1 - d\rho' \cos^2 L_1);$$

$d\rho$ est ici la variation pour 1′ de la réfraction ρ prise dans la Table III. A chacune de ces corrections $\frac{\Delta_1}{2} d\rho \cos^2 S_1$ ou

Fig. 81.



$\frac{\Delta'_1}{2} d\rho' \cos^2 L_1$ on pourra ajouter 0″,27 pour tenir compte d'un petit terme constant donné par la théorie. Ne pas oublier, en faisant le produit $\frac{\Delta_1}{2} d\rho$, que $\frac{\Delta_1}{2}$ doit être exprimé en minutes et fractions de minute.

L'angle S_1 s'obtient par

$$\cos z'_1 = \cos\partial_1 \cos z_1 + \sin\partial_1 \sin z_1 \cos S_1,$$

d'où l'on tire

$$\sin z_1 \cos S_1 = \frac{\cos z'_1}{\sin\partial_1} - \frac{\cos z_1}{\tang\partial_1}.$$

Il suffit de calculer à trois décimales. De même on a

$$\sin z'_1 \cos L_1 = \frac{\cos z_1}{\sin\partial_1} - \frac{\cos z'_1}{\tang\partial_1}.$$

Ainsi à la distance des bords on ajoutera, pour avoir ∂_1, la somme

$$\tfrac{1}{2}\Delta_1 - \tfrac{1}{2}\Delta_1\, d\rho \cos^2 S_1 - 0'',27 + \tfrac{1}{2}\Delta'_1 - \tfrac{1}{2}\Delta'_1\, d\rho' \cos^2 L_1 - 0'',27.$$

Corrections de la distance géocentrique ∂.

Il y en a deux fort importantes : la première est relative à la parallaxe de N en O, la seconde à l'erreur des Tables de la Lune.

Première correction. — En calculant la parallaxe pour passer de z' à z'_1, nous avons transporté de M en N l'origine des coordonnées. Il s'agit ici de remonter de N en O, point auquel se rapportent les distances lunaires de la *Connaissance*

Fig. 82.

des Temps. Soient OB le rayon arbitraire de la sphère céleste dirigé dans le sens de la ligne des pôles, l la Lune, s le Soleil, ce dernier étant placé sur la ligne NS à une distance presque infinie par rapport au petit déplacement NO. Désignons par L et L′ les projections de la Lune l sur la sphère céleste, suivant que cet astre est vu de N ou de O. Le petit arc LL′ sera, sur le méridien céleste BL, la parallaxe due à ON. Son expression est donc $P.\mathrm{ON}\sin\delta'$. Il en résultera une petite variation dans le côté $\mathrm{LS} = \partial$, qui deviendra L′S. On obtiendra cette variation en différentiant par rapport à δ' et à ∂ l'équation du triangle BSL, dont l'angle en B est la différence d'ascension droite des deux astres :

$$\cos\partial = \cos\delta\cos\delta' + \sin\delta\sin\delta'\cos(\mathrm{Æ}).$$

On a ainsi

$$\sin\partial\, d\partial = [\cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos(\mathrm{Æ})]\, d\delta',$$

et, comme on a aussi, dans le triangle BSL,

$$\sin\partial\cos\mathcal{L} = \cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos(\mathrm{Æ}),$$

l'expression différentielle se réduit à

$$d\partial = d\delta' \cos \leftmoon = \mathrm{P.ON} \sin\delta' \cos \leftmoon.$$

On aura $\cos \leftmoon$ par

$$\cos\delta = \cos\partial \cos\delta' + \sin\partial \sin\delta' \cos \leftmoon,$$

et l'on en déduit

$$d\partial = \mathrm{LL}' = \mathrm{P.ON} \left(\frac{\cos\delta}{\sin\partial} - \frac{\cos\delta'}{\operatorname{tang}\partial} \right).$$

C'est la formule de Borda. Le coefficient P.ON atteint 22″ vers 30° ou 150° de colatitude et s'annule à l'équateur.

Seconde correction. — On a, pour calculer les distances lunaires de la *Connaissance des Temps,* à résoudre le même triangle qui donne

$$\cos\partial = \cos\delta \cos\delta' + \sin\delta \sin\delta' \cos(\text{Æ}).$$

Différentions-la par rapport à ∂ et à (Æ) :

$$\sin\partial\, d\partial = \sin\delta \sin\delta' \sin(\text{Æ})\, d\text{Æ},$$

$d\text{Æ}$ étant l'erreur de l'ascension droite de la Lune. On en tire

$$d\partial = \sin\delta' \sin \leftmoon\, d\text{Æ}.$$

En 1878, $d\text{Æ} = 12''$ à retrancher des Æ tabulaires de la Lune. Il faudra donc retrancher $12'' \sin\delta' \sin \leftmoon$ de toutes les distances lunaires de la *Connaissance des Temps,* ou, ce qui seul est praticable, ajouter $12'' \sin\delta' \sin \leftmoon$ à la distance observée (géocentrique) pour la rendre comparable à celles de la *Connaissance des Temps.*

Récapitulation des formules.

Réunissons maintenant ces formules pour mieux apprécier la marche du calcul; nous donnerons plus loin une méthode aussi rigoureuse, mais un peu plus simple.

1° Prendre les éléments suivants dans la *Connaissance des Temps :*

Soleil.	Table II.	Lune.
δ,	N,	δ',
e,	ON.	Æ′,
H_s,		P,
$\frac{1}{2}\Delta$.		$\frac{1}{2}\Delta'$.

2° Calculer les distances zénithales (cinq décimales) :

Soleil.	Lune.
$\mathcal{AH} = H_p + L - e,$	$\mathcal{AH}' = H_s - \mathcal{AR}',$
$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos\mathcal{AH}.$	$\cos z' = \cos\lambda \cos\delta' + \sin\lambda \sin\delta' \cos\mathcal{AH}'.$

3° Réfraction, parallaxe, demi-diamètre :

Soleil.	Lune.
p .... *Conn. des Temps*,	$p \begin{cases} p' = \mathrm{NP}\sin z', \\ p = \mathrm{NP}\sin(z'+p'), \end{cases}$
ρ .... Table III,	ρ', pour $z'+p$..... Table III,
$\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}\Delta_1$.. *Conn. des Temps*,	$\frac{1}{2}\Delta'_1 = \frac{1}{2}\Delta' \frac{\sin(z'+p)}{\sin z'},$
$z_1 = z + p - \rho.$	$z'_1 = z' + p - \rho'.$

4° Accourcissement des demi-diamètres (trois décimales) :

$$\partial_1 \text{ provis.} = \text{dist. des bords} + \tfrac{1}{2}\Delta_1 + \tfrac{1}{2}\Delta'_1.$$

Soleil.	Lune.
$\frac{1}{2}\Delta d\rho \cos^2 S_1.$	$\frac{1}{2}\Delta' d\rho' \cos^2 L_1.$

Retrancher du ∂_1 provisoire

$$\tfrac{1}{2}\Delta d\rho \cos^2 S_1 + \tfrac{1}{2}\Delta' d\rho' \cos^2 L_1 + 0'',54 \quad (^1).$$

5° Calcul de ∂ vu du point N (sept décimales) :

(1) $$\cos\partial_1 = \cos z_1 \cos z'_1 + \sin z_1 \sin z'_1 \cos(A),$$

(2) $$\cos\partial = \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \cos(A).$$

6° Correction pour ramener ∂ de N en O (trois décimales) : ajouter à ∂

$$\mathrm{P.ON} \sin\delta' \cos\mathcal{L} \quad (^2).$$

---

(1) On déduit S_1 et L_1 du triangle ZL_1S_1 par les formules

$$\sin z_1 \cos S_1 = \frac{\cos z'_1}{\sin\partial_1} - \frac{\cos z_1}{\tang\partial_1} \quad \text{et} \quad \sin z'_1 \cos L_1 = \frac{\cos z_1}{\sin\partial_1} - \frac{\cos z'_1}{\tang\partial_1}.$$

(2) On déduit l'angle $\mathcal{L}$ du triangle BLS par la relation

$$\cos\delta = \cos\partial \cos\delta' + \sin\partial \sin\delta' \cos\mathcal{L}.$$

La formule $\mathrm{P.ON}\sin\delta' \cos\mathcal{L}$ se réduit à $\mathrm{P.ON}\left(\frac{\cos\delta}{\sin\partial} - \frac{\cos\delta'}{\tang\partial}\right).$

7° Erreur des Tables de la Lune (trois décimales). Ajouter à ∂

$$13'',2 \sin\delta' \sin ☾ \quad \text{(en 1880, \textit{voir} note p. 350).}$$

8° Interpolation entre les distances de la *Connaissance des Temps*.

Il suffit d'un coup d'œil sur ce Tableau pour voir que la difficulté n'est pas, comme nous l'avons dit déjà, dans la résolution des équations (1) et (2). Ce n'est pas là que doivent porter les efforts de simplification, mais sur les corrections de réfraction et de parallaxe. Remarquez qu'il s'agit ici de passer des distances zénithales vraies et géocentriques aux distances zénithales apparentes, marche inverse de celle que l'on suit d'ordinaire dans ces réductions. Par conséquent, les Tables de réfraction ou de parallaxe qui ont pour argument la distance zénithale apparente sont ici fort peu commodes. C'est pourquoi nous avons donné une Table de réfractions calculées pour les distances vraies. Il faudrait en avoir une pareille pour les parallaxes, d'après la formule

$$\operatorname{tang} p = \frac{\sin P \sin z}{1 - \sin P \cos z},$$

et une troisième Table pour l'augmentation du demi-diamètre de la Lune avec la hauteur. En outre, ces Tables devraient avoir assez d'étendue pour réduire au minimum le petit travail de l'interpolation.

Quant au calcul des deux équations du problème, la véritable simplification consiste dans l'emploi d'une Table des sinus verses et de leurs logarithmes, comme celles dont se servent les calculateurs du *Nautical Almanac* [1] et de la *Connaissance des Temps*, précisément pour calculer les distances lunaires de ces éphémérides. En outre, les logarithmes des sinus verses procèdent dans ces Tables avec le double argument

---

[1] Ou mieux les Tables plus récentes d'*Haversines* (*Half versed sines*, demi-sinus verses) éditées en 1876, à Londres, par le major Hannington.

en arc et en temps, ce qui épargne l'ennui d'interrompre le calcul pour transformer en arc un angle donné en temps, ou réciproquement.

Exemple. — 1880, *mai* 12, *par* $L = 21^h$, $\lambda = 45°$, *à* 6^h *temps moyen du navire, la distance des bords du Soleil et de la Lune est de* 38°11′37″; *bar.* = $0^m,760$, *therm.* = + 10°.

La Connaissance des Temps *donne, pour* $H_p = 9^h$:

Soleil.		Table II.		Lune.	
e...........	$-3^m 49^s,6$	N....	1,00170	Æ′..	$6^h 7^m 23^s,39$
δ...........	71°36′17″	ON...	0,00481	δ'...	66° 4′ 9″
H_s..........	$9^h 23^m 58^s,97$	PN...	54′ 8″,3	P....	0°54′ 2″,9
$\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}\Delta_1$...	15′51″,4	P.ON.	0′15″,6	$\frac{1}{2}\Delta$..	0°14′45″,1

Calcul des distances zénithales.

Soleil.	h m s	Lune.	h m s
H...........	6.0. 0,0	H_s......	9.23.58,97
e...........	−0.3.49,6	Æ′.....	6. 7.23,39
Æ = H_v.....	6.3.49,6	Æ′.....	3.16.35,58
$\delta - \lambda$.......	26°36′17″	$\delta' - \gamma$..	21°4′9″

$\sigma(\delta - \lambda)$.	0,10588	log sin λ.	9,84949		0,06685	9,84949
n........	0,68218	log sin δ.	9,97722		0,22356	9,96096
σz......	0,78806	log σÆ..	0,00719	$\sigma z'$.	0,29041	9,53895
		log n....	9,83390			9,34940

z..... 77°45′50″ z'..... 44°47′54″

Réfraction et parallaxe.

Soleil.	° ′ ″	Lune.	° ′ ″		
z......	77.45.50,0	z'.....	44.47.54,0	log PN...	3,51166
p......	+ 0. 0. 8,6	p.....	+ 0.38.34,5	log sin z'.	9,84795
	77.45.58,6		45.26.28,5		3,35961
ρ......	− 0. 4.21,5	ρ.....	− 0. 0.59,2	p'.......	0°38′ 9″
z_1.....	77.41.37	z'_1.....	45.25.29	z'.......	44°47′54″
					45°26′ 3″

log PN.......	3,51166
log sin $(z'+p)$.	9,85280
log p........	3,36446

Demi-diamètres accourcis et distance apparente.

$\log\cos z'_1$ ...	9,846
$\log\sin\partial_1$ ...	9,796
	0,050
1er nombre.	1,122
— 2e » .	0,266
Diff.	0,856
Table III. (En minutes.)	

$\log\cos z_1$ ...	4,328
$\log\text{tang}\,\partial_1$.	9,904
	9,424
log diff.	9,932
C^t $\log\sin z_1$.	0,010
$\log\cos S_1$ ..	9,942
$\log\cos^2 S_1$ ..	9,884
$\log d\rho$	9,522
$\log\frac{1}{2}\Delta_1$	1,200
	0,606
	4",0
	+0",8
	4",8

$\log\sin(z'+p)$.	9,85280
C^t $\log\sin z'$ ...	0,15205
$\log\frac{1}{2}\Delta'$	2,94699
	2,95184
$\frac{1}{2}\Delta'_1$	0°.14'.55",0
$\frac{1}{2}\Delta_1$	0.15.51,4
Dist. bords.	38.11.37,0
	38.42.23,4
Accourc ...	— 0. 0. 4,8
∂_1	38.42.19

La correction d'accourcissement pour la Lune se réduit à 0",3.

Distance géocentrique (pour le point N*).*

$\partial_1 = 38°42'19''$, $z_1 - z'_1 = 32°16'8''$, $z - z' = 32°57'56''$.

$\sigma\partial_1$	0,2196272
$\sigma(z_1 - z'_1)$.	0,1544481
Diff.	0,0651791

log diff.	8,8141084
C^t $\log\sin z_1$.	0,0100957
C^t $\log\sin z'_1$.	0,1473194
$\log\sigma(\text{A})$...	8,9715235
$\log\sin z$....	9,9900201
$\log\sin z'$...	9,8479510
$\log n$.......	9,8094946

n.........	0,0644903
$\sigma(z - z')$..	0,1610021
$\sigma\partial$.......	0,2254924
∂ provis...	39°14'22",5

Complément de parallaxe (de N *en* O*).*

$\log\cos\delta$.....	9,499	$\log\cos\delta'$......	9,608
$\log\sin\partial$.....	9,801	$\log\text{tang}\,\partial$.....	9,912
	9,698		9,696

Premier nombre.......	0,4989
Deuxième nombre.....	0,4967
	0,0022

Correction insensible..... $\mathfrak{L} = 90°$

Erreur des Tables $+ 13'',2$ (*en* 1880).

log 13″,2.....	1,121
log sin δ′.....	9,961
log sin ☾.....	0
	1,082
	+ 0° 0′ 12″,1
	39.14.22,5
∂...........	39.14.34,6

Interpolation.

C. d. T. à 9h.....	39° 14′ 27″,0	log $\frac{3^a}{\text{diff.}}$.....	0,3465
Diff.............	0° 0′ 7″,6	log 7″,6.....	0,8808
H_p.............	9h 0m 16s,9		1,2273
H.............	6. 0. 0,0		16s,9
L.............	20.59.43,1		

Diverses manières de résoudre les équations (1) et (2).

Nous avons déjà fait remarquer que la difficulté du calcul précédent ne porte nullement sur les équations (1) et (2), et que la meilleure manière de les résoudre est de suivre la marche adoptée par les calculateurs des éphémérides pour le calcul des distances lunaires. Cependant les auteurs ont cherché et proposé un grand nombre de méthodes à ce sujet, espérant ainsi faciliter notablement le calcul des distances lunaires. Sans partager cette illusion, nous allons en indiquer les principales.

En premier lieu, il est bien aisé de traiter directement ces équations en passant des logarithmes aux nombres et réciproquement. De (1) on tire la valeur de log cos(A) qu'on porte dans (2), et l'on obtient ainsi $\log\cos\partial$ et par suite ∂. En calculant à sept décimales, on aura ∂ à la seconde près, à moins que ∂ ne soit très petit, cas exclu d'avance.

En second lieu, on peut rendre (1) et (2) calculables par logarithmes en posant $z_1 - z'_1 = \beta_1$, $z - z' = \beta$; elles prennent

alors la forme

$$\sin\tfrac{1}{2}(\partial_1 - \beta_1)\sin\tfrac{1}{2}(\partial_1 + \beta_1) = \sin z_1 \sin z'_1 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\partial - \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\partial + \beta) = \sin z \sin z' \sin^2\left(\frac{A}{2}\right).$$

Divisons membre à membre; il vient

$$\sin\tfrac{1}{2}(\partial - \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\partial + \beta) = \sin^2\tfrac{1}{2}\partial - \sin^2\tfrac{1}{2}\beta$$
$$= \frac{\sin z \sin z'}{\sin z_1 \sin z'_1}\sin\tfrac{1}{2}(\partial_1 - \beta_1)\sin\tfrac{1}{2}(\partial_1 + \beta_1).$$

On introduit un angle auxiliaire φ en posant

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tang}^2\varphi = \frac{\sin z \sin z'}{\sin z_1 \sin z_1}\sin\tfrac{1}{2}(\partial_1 - \beta_1)\sin\tfrac{1}{2}(\partial_1 + \beta_1),$$

et l'on a finalement

$$\sin\tfrac{1}{2}\partial = \sin\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{séc}\varphi.$$

C'est la formule de Borda. En voici l'application à l'exemple précédent :

Formule de Borda.

z_1	77°41′37″	z	77°45′50″	∂_1	38°42′19″
z'_1	45.25.29	z'	44.47.54		
β_1	32.16. 8	β	32.57.56		
∂_1	38.42.19	$\frac{1}{2}\beta$	16.28.58		
$\partial_1 - \beta_1$	6.26.11	$\log\sin\frac{1}{2}\beta$	9,4529009		
$\partial_1 + \beta_1$	70.58.27	$\log\sin^2\frac{1}{2}\beta$	8,9058018		
$\frac{1}{2}(\partial_1 - \beta_1)$	3.13. 5,5				
$\frac{1}{2}(\partial_1 + \beta_1)$	35.29.13,5				

$\log\sin z$	9,9900201		
$\log\sin z'$	9,8479510		
$C^t\log\sin z_1$	0,0100957		
$C^t\log\sin z'_1$	0,1473194		
	9,9953862		
$\log\sin\frac{1}{2}(\partial_1 - \beta_1$	8,7492613	$\log\operatorname{séc}\varphi$	0,0731501
$\log\sin\frac{1}{2}(\partial_1 + \beta_1)$	9,7638168	$\log\sin\frac{1}{2}\beta$	9,4529009
$C^t\log\sin^2\frac{1}{2}\beta$	1,0941982	$\log\sin\frac{1}{2}\partial$	9,5260510
$\log\operatorname{tang}^2\varphi$	9,6026624	$\frac{1}{2}\partial$	19°37′11″,2
$\log\operatorname{tang}\varphi$	9,8013312	∂	39°14′22″,4
φ	32°19′46″,1		

Ce procédé est moins simple que celui des sinus verses.

On a proposé, toujours pour le calcul de ∂ au moyen des équations (1) et (2), d'autres procédés qui consistent à chercher $\partial - \partial_1$ au lieu de ∂, et cela pour éviter l'emploi des Tables à sept décimales. Déjà, en nous bornant aux termes du premier ordre en $\partial - \partial_1$, $z - z_1$, $z' - z'_1$ ou en x, α et α', nous avons trouvé

$$x = \alpha \cos S_1 + \alpha' \cos L_1.$$

Tenons compte maintenant des termes du second ordre, c'est-à-dire de x^2, α^2, α'^2, $\alpha\alpha'$, négligeant seulement les termes du troisième ordre de petitesse. Il suffira pour cela de porter, dans l'équation (2), $\partial_1 + x$, $z_1 + \alpha$, $z'_1 + \alpha'$ à la place de ∂, z, z', et de développer les sinus et cosinus en remplaçant les cosinus des petits arcs par les deux premiers termes de leurs séries et leurs sinus par l'arc; par exemple, $\cos(\partial_1 + x)$ deviendra $\cos\partial_1\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - x\sin\partial_1$. On effectuera les multiplications en négligeant les termes du troisième ordre, et l'on trouvera

$$x = \alpha \cos S_1 + \alpha' \cos L_1 + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2 + \alpha'^2 - x^2}{206265'' \operatorname{tang}\partial_1}$$
$$- \frac{\alpha\alpha'}{206265''}\,\frac{\sin z_1 \sin z'_1 + \cos z_1 \cos z'_1 \cos(A)}{\sin\partial_1}.$$

Mais d'ordinaire α est beaucoup plus petit que α', à moins que le Soleil ne soit très bas et n'ait une réfraction considérable. Si donc on néglige α'^3, on sera en droit de négliger aussi α^2 et même $\alpha\alpha'$ comme étant du troisième ordre de petitesse par rapport à α'. Alors la formule se réduit à

$$x = \alpha \cos S_1 + \alpha' \cos L_1 + \frac{1}{2}\,\frac{(\alpha' - x)(\alpha' + x)}{206265'' \operatorname{tang}\partial_1}.$$

Cela suppose que la distance mesurée n'est pas très petite et que le Soleil n'est pas très bas; autrement les termes négligés acquerraient une valeur sensible. Par ce procédé, il faut calculer avec soin, mais à cinq décimales seulement, les angles S_1

et L_1 par les formules connues

$$\tang \tfrac{1}{2} S_1 = \sqrt{\frac{\sin(s - z_1)\sin(s - \partial_1)}{\sin s \sin(s - z'_1)}},$$

$$\tang \tfrac{1}{2} L_1 = \sqrt{\frac{\sin(s - z'_1)\sin(s - \partial_1)}{\sin s \sin(s - z_1)}},$$

dans lesquelles $2s = z_1 + z'_1 + \partial_1$. Appliquons ce procédé au cas précédent :

∂_1.....	38°.42′.19″	$\log\sin(s-\partial_1)$...	9,82725	$\log\sin(s-\partial_1)$...	9,82725
z_1....	77.41.37	$\log\sin(s-z_1)$..	8,75040	$\log\sin(s-z'_1)$..	9,76381
z'_1....	45.25.29	$C^t\log\sin s$......	0,00549	$C^t\log\sin s$......	0,00549
$2s$....	161.49.25	$C^t\log\sin(s-z'_1)$.	0,23619	$C^t\log\sin(s-z_1)$.	1,24960
s.....	80.54.43		8,81933		0,84615
$s-\partial_1$.	42.12.24	$\tang\frac{1}{2}S_1$........	9,40967	$\tang\frac{1}{2}L_1$........	0,42308
$s-z_1$.	3.13. 6	$\frac{1}{2}S_1$............	14°24′.3	$\frac{1}{2}L_1$............	69°19′,1
$s-z'_1$.	35.29.14	S_1...........	28°48′,1	L_1.............	138°38′,2

z...........	77°.45′.50″	z'..........	44°.47′.54″
z_1..........	77.41.37	z'_1..........	45.25.29
$\alpha = z - z_1$...	0. 4.13	$\alpha' = z' - z'_1$...	− 0.37.35

$\log\alpha$....	2,40312	$\log\alpha'$....	3,35315n
$\log\cos S_1$.	9,94262	$\log\cos L_1$.	9,87537n
	2,34574		3,22852

$\alpha\cos S_1$..	221″,7	α'.......	−2255″,0		
$\alpha'\cos L_1$..	1692,5	x.......	1914,2		
x appr...	1914,2	$\alpha'+x$..	− 341,0	log.........	2,533
2ᵉ terme.	+ 3,4	$\alpha'-x$...	−4169,0	log.........	3,620
x.......	1917,6			$\log\frac{1}{2}$........	9,699−10
		∂_1.....	38°.42′.19″,0	$\log\cot\partial_1$....	0,096
		x......	0.31.57,6	$C^t\log 206265$.	4,686−10
		∂......	39.14.16,6	log 2ᵉ terme..	0,534

Ce résultat diffère sensiblement de celui que nous avons trouvé par les deux précédentes méthodes. Cela tient à ce que α n'est pas assez petit pour qu'on néglige α^2 et surtout $\alpha\alpha'$. En employant la formule plus complète, on trouverait $\partial = 39°14'21''$, résultat presque exact. Dans tous les cas, le calcul est encore

plus long que par les procédés directs, et il a l'inconvénient de substituer à des formules rigoureuses une réduction en série dont le plus ou moins de convergence ne saute pas aux yeux. Ajoutons que, quel que soit le procédé, il reste toujours à corriger le ∂ obtenu de la petite parallaxe pour ON et de l'erreur des Tables.

CHAPITRE XXXVII.

NOUVELLE MÉTHODE PAR L'ASCENSION DROITE DE LA LUNE.

Elle a pour but de supprimer les deux dernières corrections, de simplifier l'interpolation en la réduisant aux différences premières et de sortir, au besoin, du cadre des distances lunaires de la *Connaissance des Temps*. Aux équations (1) et (2), qui donnent ∂, joignons l'équation suivante qui donne (Æ), différence d'ascension droite des deux astres :

$$(3) \qquad \cos\partial = \cos\delta\cos\delta' + \sin\delta\sin\delta'\cos(Æ).$$

Il suffira, pour que cette équation se rapporte au point N comme (2), de retrancher de δ' la petite parallaxe pour ON :

$$\mathrm{P.ON}\sin\delta'.$$

En résolvant cette dernière équation par rapport à (Æ), il est inutile de reporter l'origine de N en O, car (Æ) garde même valeur quelque part que l'on place l'origine sur l'axe polaire NOB. Quant à l'erreur de l'éphéméride, on en tiendra compte en l'ajoutant à l'Æ conclue. Reste l'interpolation; mais, comme les Æ de la Lune sont données d'heure en heure dans la *Connaissance des Temps*, et non de trois heures en trois heures, il n'y a pas à tenir compte des différences secondes. Le calcul en sera sensiblement simplifié; de plus, on pourra choisir l'astre de comparaison en dehors de ceux dont la

Connaissance des Temps donne les distances à la Lune; il suffit que l'angle à la Lune dans le triangle BLS soit aussi près que possible de 90°.

Il y aura encore trois manières de résoudre le système des équations (1), (2) et (3) : par le calcul direct, en passant des logarithmes aux nombres et réciproquement; par une formule dite calculable par logarithmes, comme celle de Borda; enfin par les sinus verses. Pour la deuxième méthode, on mettra les équations sous la forme

$$\cos\partial_1 - \cos\beta_1 = -2\sin z_1 \sin z'_1 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right),$$
$$\cos\partial - \cos\beta = -2\sin z \sin z' \sin^2\left(\frac{A}{2}\right),$$
$$\cos\partial - \cos\gamma = -2\sin\delta \sin\delta' \sin^2\left(\frac{Æ}{2}\right).$$

En éliminant $\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$ et $\cos\partial$, on trouvera

$$\sin\delta\sin\delta'\sin^2\left(\frac{Æ}{2}\right) = \sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) + k\sin\tfrac{1}{2}(\partial_1-\beta_1)\sin\tfrac{1}{2}(\partial_1+\beta_1),$$

formule où l'on a

$$z_1 - z'_1 = \beta_1,\quad z - z' = \beta,\quad \delta - \delta' = \gamma,\quad k = \frac{\sin z \sin z'}{\sin z_1 \sin z'_1}.$$

On y introduira un angle auxiliaire φ comme précédemment. Nous préférons la méthode des sinus verses. Sous cette forme, les trois équations se présentent ainsi :

$$\sigma\partial_1 - \sigma\beta_1 = \sin z_1 \sin z'_1\, \sigma(A),$$
$$\sigma\partial - \sigma\beta = \sin z \sin z'\, \sigma(A),$$
$$\sigma\partial - \sigma\gamma = \sin\delta \sin\delta'\, \sigma(Æ).$$

En éliminant $\sigma(A)$ on aura, comme plus haut,

$$\sigma\partial - \sigma\gamma = k(\sigma\partial_1 - \sigma\beta_1).$$

En éliminant $\sigma\partial$, on aura finalement

$$\sigma\beta - \sigma\gamma = \sin\delta\sin\delta'\sigma(Æ) - k(\sigma\partial_1 - \sigma\beta_1).$$

Appliquons ce procédé au précédent exemple, et, pour cela, rapportons d'abord δ' au point N :

log P..........	3,51094
log ON........	7,68215
log sin δ'......	9,96096
	1,15405
	$-$ 0°. 0'. 14",3
δ'............	66. 4. 9,0
δ' corr........	66. 3.54,7

Il serait bien inutile d'appliquer une correction analogue à δ.

∂_1.....	38°42'19"	z......	77°.45'.50"	z_1.....	77°.41'.37"	δ......	71°.36'.17"
		z'.....	44.47.54	z'_1.....	45.25.29	δ'.....	66. 3.55
		β.....	32.57.56	β_1.....	32.16. 8	γ......	5.32.22

$\sigma\beta$.............	0,1610021	$\sigma\partial_1$...........	0,2196272	log sin z....	9,9900201
$\sigma\gamma$........... ..	0,0046699	$\sigma\beta_1$....... ...	0,1544481	log sin z'...	9,8479510
1er terme........	0,1563322	2e terme.......	0,0651791	C^t log sin z_1..	0,0100957
2e terme $\times k$....	0,0644903			C^t log sin z'_1.	0,1473194
sin δ sin δ' σ(Æ).	0,2208225....	log............	9,3440433	log k.......	9,9953862
		C^t log sin δ......	0,0227786	log 2e terme.	8,8141084
		C^t log sin δ'.....	0,0390499	log 2e t. $\times k$.	8,8094946
		log σ(Æ)......	9,4058718		
			h m s		
		(Æ)..........	2.47.13,73	**Interpolation.**	
		☉ Æ..........	3.20. 9,34	log 0s,56....	9,748
		☾ Æ..........	6. 7.23,07	C^t log 2,1454.	9,668
		Err. des Tables.	0. 0. 0,88 (1)	log 60.......	1.778
			6. 7.23,95		1,194
		C. d. T........	6. 7.23,39		+15s,6
			0. 0. 0,56		

L'heure de Paris était donc $9^h 0^m 15^s,6$ et la longitude de

---

(1) Les observations les plus récentes de la Lune faites, pendant l'impression de cet Ouvrage, aux Observatoires de Greenwich et de Paris, montrent que cette erreur des Tables lunaires n'est pas aussi forte actuellement que nous l'avons supposée d'après les observations des quinze années précédentes. Il faudra donc réduire la correction adoptée dans le texte à 0s,60 pour 1880, ou mieux la calculer pour une erreur de 9" sur la longitude moyenne.

$20^h 59^m 44^s,6$. La petite différence de $1^s,3$ avec le résultat précédent tient uniquement aux fractions de seconde que nous avons négligées. Ce procédé réalise, comme on le voit, une simplification fort appréciable. En outre il permet, nous le répétons, d'étendre le procédé des distances lunaires à des astres qui ne figureraient pas dans la *Connaissance des Temps*.

Ici une objection se présente. Si la longitude estimée est très erronée, de 5^m par exemple, le δ' de la Lune qui intervient dans ces calculs sera en erreur d'une quantité notable aux époques où la variation horaire de δ' atteint son maximum de $15''$ à $17''$, c'est-à-dire lorsque $Æ = 0°$ ou $180°$. L'erreur du δ', calculé par les éléments de l'estime, irait à $80''$. Mais, en différentiant l'équation (3) par rapport à δ' et à $(Æ)$, on a

$$dÆ = \frac{-d\delta'}{\tan g \,☾ \sin \delta'},$$

☾ étant l'angle à la Lune dans le triangle BSL. Or, à l'époque indiquée, δ' est droit, et, si l'on choisit l'astre de comparaison de manière que ☾ ne soit pas très différent de 90°, l'erreur résultante pour Æ ne dépassera pas 3^s ou 4^s, ce qui donne 2^m au plus d'erreur sur la longitude conclue. Ainsi, même avec une longitude de départ fausse de 5^m, on arrivera facilement à un résultat exact par un tâtonnement rapide qui ne portera que sur $\log \sin \delta'$, c'est-à-dire sur le dernier logarithme employé.

Au point de vue de l'observation, la méthode que nous venons de proposer présente des avantages. On sait combien il est difficile de maintenir les deux astres dans le champ de la lunette d'un cercle ou d'un sextant lorsque leur distance est très grande. Les marins voudraient tous n'avoir que de faibles distances lunaires à mesurer. Or on ne les donne pas dans la *Connaissance des Temps*, parce que l'interpolation entre de telles distances, calculées de trois heures en trois heures, deviendrait souvent très pénible (¹). Avec la méthode actuelle,

---

(¹) C'est pourtant une innovation qui vient d'être réalisée à partir de 1880, grâce à une Table d'interpolation spéciale qui permet de tenir compte fort aisément des troisièmes différences.

on utilisera les plus petites distances, pourvu que l'angle en ☾ ne diffère pas trop d'un droit.

En considérant les difficultés de l'observation et la longueur des calculs, on conçoit que les navigateurs portent leurs préférences du côté de la méthode chronométrique. De là une tendance bien naturelle à préconiser les mérites des chronomètres et à surfaire le degré de confiance qu'on doit leur accorder. Quelques personnes affirment aujourd'hui qu'avec trois chronomètres on est en état de se passer des distances lunaires, grâce à la perfection à laquelle ces instruments délicats sont arrivés. Nous ne connaissons pas, dans les progrès nouveaux qui ont été effectivement réalisés, les perfectionnements particuliers auxquels on attribue tous ces mérites. Nous ne voyons pas davantage que la discussion des marches relatives ou absolues de ces instruments délicats supplée le moins du monde à la théorie des perturbations auxquelles leurs marches sont exposées, théorie dont nous n'avons pas même les premiers éléments. La seule chose qui nous paraisse évidente, c'est que les chances de dérangement sont d'autant moins à redouter que les traversées sont plus courtes. Mais, pour peu que la traversée se prolonge, que les chronomètres ne soient pas mis à l'abri des variations de température ou soient exposés à des accidents de mer, etc., la prudence exige qu'on ne se fie pas exclusivement à leurs indications. Il peut toujours arriver un moment où le recours aux distances lunaires devient indispensable; mais alors, si l'officier ne s'y est pas exercé, s'il a trop longtemps négligé cette dernière ressource, il se trouvera embarrassé au moment d'exécuter des observations et des calculs qui n'ont pourtant, au fond, que l'inconvénient d'exiger un peu plus de temps et de soin que le vulgaire calcul d'un angle horaire ou d'une colatitude. Nous ne croyons donc pas que ce soit un vrai service à rendre aux marins que de leur présenter la méthode exclusivement chronométrique comme étant appelée à remplacer désormais les distances lunaires; tout juge consciencieux, à l'aspect de ces machines fermées auxquelles il lui est interdit de toucher et dont il doit adopter les indications de confiance,

sentira que nous n'exagérons rien en disant que le contrôle indispensable à la sécurité des hommes et des biens est et restera toujours l'observation des astres.

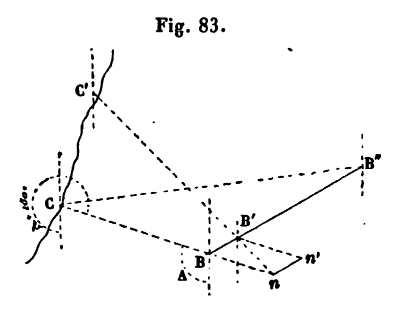
CHAPITRE XXXVIII.

RELEVEMENT DES POINTS TERRESTRES EN VUE.

Au départ et surtout au moment d'atterrir, lorsqu'on a en vue les côtes, et certains points faciles à distinguer de loin et marqués sur la Carte, on détermine la position du navire en relevant ces points à la boussole et en portant les directions ainsi obtenues sur la Carte.

Supposons que, du navire B, on relève l'azimut A d'un point C

Fig. 83.



de la côte. L'azimut de B sur l'horizon de C sera à très peu près A+180°. En traçant par le point C une droite sous cet azimut-là, le navire B devra se trouver quelque part sur cette ligne. Le navire étant en marche, on relèvera un autre point C' du point B'. Si l'on mène sur la Carte une seconde droite C'B' sous le second azimut augmenté de 180°, le navire devra se trouver sur cette seconde droite en B'. La longueur BB' de la route parcourue entre les deux relèvements étant connue ainsi que son azimut (angle de route), on mènera, par le point de rencontre *n* des

deux droites, une ligne nn' représentant le chemin fait, et par n' une parallèle $n'B'$ à Cn. Les points B' et B ainsi obtenus seront les deux positions du navire à l'instant de chaque relèvement. S'il n'y a en vue que le point C, on laissera écouler plus de temps entre les deux relèvements BC et B″C. Les deux droites indéfinies CB et CB″ étant tracées, on n'aura plus qu'à résoudre encore le problème élémentaire d'inscrire entre elles une droite de longueur et de direction données, c'est-à-dire la route parcourue en la supposant rectiligne.

S'il arrive que dans le cours d'un voyage on rencontre des terres connues sans en approcher, on saisira cette occasion d'obtenir la position du navire avec une grande exactitude, du moins si l'on substitue le calcul à la construction précédente.

En relevant du point B l'azimut A d'une cime éloignée C dont les coordonnées L' et λ' sont connues, on aura celles du point B, c'est-à-dire L et λ, par

$$v \sin A = (L - L') \sin \frac{\lambda' + \lambda}{2},$$
$$v \cos A = \lambda' - \lambda,$$

formules (1) et (3) du Chapitre XXIV applicables à tous les cas, sans discussion, pourvu que l'on compte les A et les L suivant les règles convenues.

Pour déterminer la distance $v = BC$, on mesure l'azimut A_1 du point C vu d'une seconde position D du navire. En considérant les méridiens PB et PD comme parallèles, c'est-à-dire en négligeant leur faible convergence, on aura les angles à la base du triangle CBD par

$$A - V = B, \quad A_1 - V = 180^\circ - D,$$

V étant l'angle de route corrigé de la dérive et des courants. On aura donc $BC = v$ par la formule connue des triangles rectilignes

$$v = BD \frac{\sin D}{\sin(B + D)}.$$

La base BD doit être mesurée avec soin par le loch. L'exactitude du résultat dépendant surtout de celle des azimuts A, A', V,

on aura soin de contrôler astronomiquement le compas de relèvement par un azimut du Soleil pris un peu avant ou après l'opération précédente.

Mais, dans ces formules empruntées au Chapitre XXIV, A et ν sont des éléments loxodromiques qui ne répondent pas rigoureusement aux éléments correspondants $180° - B$ et BC du triangle sphérique PBC.

Fig. 84.



Quand du point B on relève, à la boussole, un point éloigné C, c'est $A = 180° - B$ qu'on obtient et non l'azimut loxodromique de C. Dès lors, l'azimut réciproque de B sur l'horizon de C, c'est-à-dire $180° + C$, n'est plus $A + 180°$, mais $A + 180° - \omega$, en désignant par ω l'angle de convergence des méridiens PB et PC, c'est-à-dire $A - C$. De même l'arc de loxodromie ν, qui va de B en C, doit être remplacé par l'arc de grand cercle BC. En un mot, à la construction ou aux calculs qui précèdent il faut substituer la résolution du triangle sphérique PBC, dont on connaît les côtés BC, $PC = \lambda'$ et l'angle $B = 180° - A$. On profitera seulement de la petitesse des éléments BC, $P = L - L'$ et $\lambda' - \lambda$ pour simplifier les formules ordinaires.

L'analogie des sinus nous donne

$$\sin A \sin BC = \sin P \sin \lambda'$$

ou bien

$$BC \sin A = (L - L') \cos \lambda'.$$

Puis vient l'analogie de Neper

$$\tang\frac{\lambda'-\lambda}{2} = -\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}\tang\frac{BC}{2},$$

ou, en remplaçant B par 180° — A, C par A — ω et passant aux arcs,

$$\lambda'-\lambda = BC\frac{\cos\left(A-\frac{\omega}{2}\right)}{\cos\frac{\omega}{2}},$$

ce qui se réduit sensiblement à

$$\lambda'-\lambda = BC\cos\left(A-\frac{\omega}{2}\right).$$

Quant à la convergence ω des méridiens PB et PC, on a, par une autre analogie,

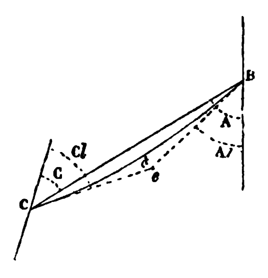
$$\tang\frac{B+C}{2} = \frac{\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2}}{\cos\frac{\lambda'+\lambda}{2}}\cot\frac{P}{2},$$

qui, par les substitutions précédentes, devient

$$A - C \text{ ou } \omega = (L-L')\cos\frac{\lambda'+\lambda}{2}.$$

Il est aisé de calculer la différence qui existe entre les azimuts loxodromique et sphérique du point C sur l'horizon de B.

Fig. 85.



Concevons qu'on ait circonscrit un cylindre à la sphère autour du cercle BC et qu'on développe ce cylindre. Sur la Carte

ainsi construite, les angles en B et C seront conservés ; l'arc de grand cercle BC deviendra une droite et l'arc de loxodromie deviendra une courbe BdC. Celle-ci, étant d'amplitude très faible, se confondra sensiblement avec son cercle osculateur dans l'étendue BdC. Par suite, les angles CBe, BCe, formés par la corde BC avec les tangentes extrêmes, seront égaux. Soit β cet angle. On aura

$$C + \beta = Cl, \quad A - \beta = Al.$$

Or les azimuts loxodromiques Al et Cl sont égaux; donc $A - C = 2\beta$. Ainsi la différence β entre l'azimut sphérique du point C et son azimut loxodromique est la moitié du petit angle

$$(L' - L) \cos \frac{\lambda' + \lambda}{2},$$

précisément celui que nous avons obtenu tout à l'heure pour la convergence des méridiens.

Cette différence entre l'azimut sphérique et l'azimut loxodromique, insensible dans les régions équatoriales, prend plus d'importance dans les contrées polaires. En remplaçant $L' - L$ par sa valeur, on a

$$\beta = \tfrac{1}{2} v \frac{\sin A}{\tang \frac{\lambda' + \lambda}{2}}.$$

Pour $A = 90°$ et $\lambda = 30°$ on aurait $\beta = 0{,}9v$, et, si l'on relevait une cime à 1° de distance, $\frac{\omega}{2}$ ou β serait de $54'$.

Ainsi, sauf dans les contrées polaires, où il faut appliquer les formules précédentes ou même les expressions rigoureuses de la Trigonométrie sphérique, on pourra employer les formules ordinaires du problème des routes. L'erreur qui en résulterait, par exemple, dans le calcul qui termine le dernier Chapitre ne dépasserait pas $0',1$ ou $0',2$.

Quant à l'arc v, qu'on obtient le plus souvent par une triangulation en relevant, de deux points de la route suffisamment écartés, l'azimut de la cime en vue, et en mesurant au loch et

à la boussole la base du triangle ainsi obtenu et sa direction, on peut aussi le déterminer d'une seule station en mesurant simplement la hauteur angulaire de la cime, pourvu que l'altitude de celle-ci soit connue. Ce sera l'objet du dernier Chapitre.

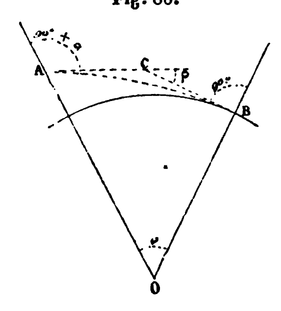
CHAPITRE XXXIX.

ÉVALUATION DES DISTANCES PAR LES HAUTEURS.

Distance d'un point d'altitude connue vu à l'horizon de la mer.

Si ce point a pour altitude zéro, c'est-à-dire s'il appartient à la surface même de la mer, on calcule aisément sa distance v par la formule $v = \frac{m}{m-1} d$, d étant la dépression qui répond à l'altitude h de l'œil de l'observateur en A (¹). En effet, dans

Fig. 86.



la figure ci-jointe, le quadrilatère ACBO rectangle en B a pour somme de ses angles intérieurs

$$90^\circ - d + 180^\circ - \rho + 90^\circ + v = 360^\circ, \quad \text{d'où} \quad d = v - \rho.$$

(¹) Cette dépression se calcule par la formule de la page 136 qui, réduite en nombres, devient

$$d = 1',8045\sqrt{h}.$$

Or $\rho = \frac{v}{m}$; donc

$$v = \frac{m}{m-1} d.$$

Si le point ainsi vu à l'horizon de la mer a pour altitude h', soit d' la dépression correspondante. L'angle au centre sera évidemment $(d + d') \frac{m}{m-1}$. En faisant $m = 8$, ce facteur sera $\frac{8}{7}$.

Par exemple, *à quelle distance voit-on, à bord d'un navire où l'œil se trouve à une hauteur de* 6^m, *poindre à l'horizon le sommet du Pic de Ténériffe, dont la hauteur est de* 3710^m?

On aura $d = 4',42$, $d' = 112',13$. La somme multipliée par $\frac{8}{7}$ donne $v = 133',2$. La distance cherchée est donc de 133 milles marins [1].

Distance d'une cime conclue de sa hauteur angulaire.

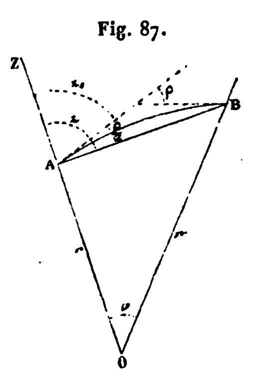
Mais, comme il faut que la cime observée dépasse sensiblement l'horizon pour être visible, la distance conclue serait trop forte. Le mieux est de mesurer au sextant la hauteur angulaire apparente α_1 de la cime, de corriger α_1 de la dépression et de la réfraction, ce qui donne la hauteur vraie α ou la distance zénithale vraie $z = 90° - \alpha$ de la cime, et de la porter dans la formule suivante.

L'angle des tangentes extrêmes à la trajectoire lumineuse

(1) Si l'on voulait calculer cette distance exactement, il faudrait tenir compte de l'aplatissement de notre globe, qui, vu d'un sommet si élevé, devient sensible en mer. Alors, au lieu du rayon moyen de la Terre supposé de 6366200^m, il faudrait employer la grande normale N si le Pic est vu dans l'est ou dans l'ouest, ou le rayon de courbure du méridien elliptique $R = \frac{N^3}{a^2}(1 - e^2)$ s'il est nord ou sud. La colatitude du Pic étant de $61°43',65$, on trouve $N = 6373400^m$, $R = 6320500^m$. Avec ces valeurs, on aurait, pour la dépression, dans le premier cas $109',72$ et dans le second $110',18$. Cette différence de $27''$ se mesurerait très bien au théodolite du haut du Pic. On aurait ainsi de la manière la plus directe, et par une seule mesure, une évaluation de l'aplatissement. En se bornant à la moyenne, on trouverait $130'$ pour la distance v, c'est-à-dire 3 milles marins de moins que par le calcul précédent.

est $\rho = \frac{v}{m}$. Comme cette trajectoire, vu son peu d'amplitude, se confond avec son cercle osculateur de A en B, les angles de ces tangentes extrêmes avec la corde AB, c'est-à-dire les

Fig. 87.



réfractions en A et B, seront égaux à $\frac{\rho}{2}$. La réfraction en A sera donc $\frac{v}{2m}$ ou $\frac{1}{16}v$, et une valeur approchée de v suffira pour calculer cette réfraction.

Cela posé, l'angle ZAB étant z, l'angle ABO sera $z - v$, et le triangle ABO donnera

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sin z}{\sin(z - v)}.$$

On en tire, par une transformation connue,

$$\frac{r' - r}{r' + r} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}v}{\operatorname{tang}(z - \frac{1}{2}v)} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v \operatorname{tang}(\alpha + \tfrac{1}{2}v).$$

Cette formule donnera v si $r' - r$ ou $h' - h$ est connu; inversement, elle donnera l'altitude h' de la cime si v est connu.

Premier cas. — *On a mesuré à bord la hauteur angulaire apparente* α_1 *du Pic de Ténériffe et l'on a trouvé* $\alpha_1 = 41',3$. *Hauteur de l'œil,* $h = 6^{m}$; *hauteur du Pic,* $h' = 3710^{m}$. *Quelle est la distance?*

La distance approchée étant $v = 86'$ (¹), on a $\frac{\rho}{2} = 5',4$. La dépression à bord est $4',4$. Par suite, $\alpha = 41',3 - 9',8 = 31',5$. La formule précédente peut s'écrire, en mettant H au lieu de $\frac{r'-r}{r'+r}$ et en remplaçant les tangentes par les angles,

$$H = \tfrac{1}{2} v\alpha + \tfrac{1}{4} v^2.$$

Cette équation donne

$$v = -\alpha + 3438' \sqrt{4H + \alpha^2},$$

α étant exprimé en parties du rayon sous le radical. Voici ce petit calcul, en supposant l'œil à 6^m de hauteur :

$r'-r$.	3704^m		3,56867	$\log\alpha$.....	1,4983	4H......	0,0011632
$r'+r$.	12736000		7,10507	log 3438'.	3,5363	α^2.. ...	0,0000839
		log H..	6,46360—10	$\log\alpha$.....	7,9620—10		0,0012471
		log 4..	0,60206		5,9240—10	log.....	7,0959—10
		log 4H.	7,06566—10			½ log....	8,5479
						log 3438'.	3,5363
							2,0842

Le nombre correspondant à ce dernier logarithme est $121',4$. Ainsi

$$v = -31',5 + 121',4 = 89',9.$$

La distance du navire au pic était donc de 90 milles.

L'erreur relative $\frac{dv}{v}$ étant égale à $\frac{d\alpha}{v+\alpha}$, on voit qu'une erreur de $1'$ sur α ne produirait sur v qu'une erreur $\frac{v}{v+\alpha} d\alpha$, c'est-à-dire de $0',74$. Mais, comme il faut corriger la hauteur apparente α_1 de la dépression et de la réfraction, ce n'est guère que dans les heures moyennes du jour, de 8^h du matin à 4^h ou 5^h du soir, que l'on pourra compter sur une pareille exactitude.

Second cas. — *On a mesuré la hauteur angulaire du Pic de*

(¹) On la déduit de la formule suivante en y mettant, pour α, la valeur provisoire $\alpha_1 - 4',4$, c'est-à-dire $36',9$.

Ténériffe d'une distance de 90 *milles et trouvé* $\alpha_1 = 41',3$: *déterminer la hauteur en mètres de ce point.*

La formule $4H = 2v\alpha + v^2$ donne immédiatement, après avoir corrigé α_1 de la dépression et de la réfraction géodésique :

v	90',0	$\log v$	1,95424
2α.. ..	62,6	$\log(2\alpha + v)$.	2,18355
$2\alpha + v$.	152,6		4,13779
		$\log \overline{3438}^2$....	7,07254
			7,06525 — 10
		$\log 4$........	0,60206
		$\log H$........	6,46319 — 10
		$\log(r' + r)$...	7,10504
		$\log(h' - h)$..	3,56823
		$h' - h$.......	3700^m
		h...........	6
		h'..........	3706

L'erreur relative de h', c'est-à-dire $\frac{dh'}{h'} = \frac{2\,d\alpha}{2\alpha + v}$. Ainsi, une erreur de 1' sur α ou α_1 donne ici $\frac{1}{76}$ pour $\frac{dh'}{h'}$. La précision n'est pas bien grande; mais, si l'on fait l'observation de plus près, α devient très grand et la précision augmente beaucoup. Alors il faut recourir à la formule exacte

$$\frac{r' - r}{r' + r} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v \operatorname{tang}\left(\alpha + \tfrac{1}{2}v\right).$$

Régler les montres par un relèvement.

Ces mesures d'altitude de points élevés et visibles de très loin étant utiles en mer, les navigateurs en ont fait en beaucoup de lieux du globe. On trouve leurs résultats sur les Cartes nautiques ou dans la *Connaissance des Temps*. Nous allons voir le parti qu'on tire de ces cimes visibles sur un très large horizon pour rectifier le point estimé, et surtout pour obtenir l'heure de Paris et contrôler les chronomètres.

Exemple. — *Le* 21 *octobre* 1880, *vers* $9^h 10^m$ *du matin, le Pic des Açores étant en vue à l'horizon par* $M' = 121°$, *on a me-*

suré sa hauteur angulaire $\alpha_1 = 65',9$. *En même temps on a observé, à* $23^h 11^m$ *des montres, la distance zénithale du Soleil et trouvé, toutes corrections faites,* $z = 60°44',1$. *Le relèvement du centre de cet astre a donné* $M'_1 = 300°$. *Il s'agit de conclure de là la position du navire et le retard absolu des montres. Hauteur de l'œil,* 6^m; *hauteur du Pic,* 2410^m. *La* Connaissance des Temps *donne pour cette cime* $\lambda' = 51°32'$, $L' = 21^h 56^m 59^s$, *et pour le Soleil, à* $23^h 11^m$, *temps moyen de Paris,* $\delta = 100°55',7$, $e = -15^m 23^s,1$.

1° *Calcul de la distance v.*

Formule : $v = -\alpha + 3438'\sqrt{4H + \alpha^2}$, où $H = \dfrac{h' - h}{r' + r}$.

Haut. app. α_1.	65',9	$h' - h$...	2404^m	log...	3,38130
Dépression...	— 4,4	$r' + r$...	12735000	log....	7,10500
Réfraction (¹).	— 3,1	log α....	1,76641	log H...	6,24630—10
α............	58,4	log 3438'.	3,53627	log 4...	0,60206
			8,23014	log 4H.	6,84836—10
		log α²...	6,46028—10		

log(4H + α²).	6,99733—10			4H......	0,00070528
log $\sqrt{4H + \alpha^2}$..	8,49866			α².......	0,00028859
log 3438'......	3,53627			4H + α².	0,00099387
	2,03493	Nombre.	108',4		
		α.......	58',4		
		v.......	50',0		

2° *Calcul de la colatitude approchée.*

Formule : $v \cos A = \lambda' - \lambda$ où l'on met M' pour A.

	log v.....	1,6990
Relèvement du Pic :	cos M'....	9,7118 n
	log λ' — λ.	1,4108 n
	λ' — λ....	— 0°.25',8
	λ'........	51.32,0
	λ app....	51.57,8

(¹) On trouve aisément par un premier essai, en négligeant d'abord la réfraction, que v est d'à peu près 50'. La réfraction en est le $\frac{1}{16}$.

3° *Calcul de l'azimut du Soleil et de l'erreur de la boussole.*

Formule : $\cos\delta = \cos\lambda\cos z - \sin\lambda\sin z\cos A$.

$\cos\delta$.....	$-0{,}18958$	$\log\cos\lambda$.	9,78967	$\log\sin\lambda$..	9,89633
$-\cos\lambda\cos z$.	0,30119	$\log\cos z$.	9,68917	$\log\sin z$..	9,94070
Diff......	0,49077		9,47884		9,83703
Soleil : A......	315°35′			log diff...	9,69088
Soleil : M'_1.....	300. 0			log cos A..	9,85385
A ajouter aux M′.	15.35				

4° *Calcul de la colatitude définitive et de la longitude.*

Formules : $v\cos A = \lambda' - \lambda$,

$v\sin A = (L - L')\sin\frac{\lambda'+\lambda}{2}$.

M′...	121° 0′	$\log v$....	1,6990	$\log v$..........	1,6990	
Corr.	+15.35	log cos A.	9,8612 n	log sin A......	9,8372	
A....	136.35		1,5602 n	$C^t\log\sin\frac{\lambda'+\lambda}{2}$.	0,1045	
		$\lambda'-\lambda$...	−0°36′,3	log (L′ — L)...	1,6407	
		λ'......	51.32,0	L — L′........	43′,7....	0ʰ 2ᵐ 54ˢ,8
		λ.....	52. 8,3	L′..........		21.56.59,0
		$\frac{\lambda'+\lambda}{2}$...	51.50,0	L............		21.59.53,8

5° *Calcul de l'heure et de l'erreur des chronomètres.*

Formule : $\cos z = \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos Æ$.

$\cos z$.......	0,48884	$\log\cos\lambda$.	9,78800	$\log\sin\lambda$...	9,89735
$-\cos\lambda\cos\delta$..	$-0{,}11636$	$\log\cos\delta$.	9,27780 n	$\log\sin\delta$...	9,99205
Diff........	0,60520		9,06580 n		9,88940
				log diff...	9,78190
				log cos Æ.	9,89250

Æ en temps...	21ʰ 25ᵐ 18ˢ,4 ou H_v
e.............	— 0.15.23,1
H............	21. 9.55,3
L............	21.59.53,8
H_p...........	23.10. 1,5
Chron.........	23.11. 0,0
Correction....	— 0. 0.58,5

On simplifie sensiblement ces calculs en employant la Table des sinus verses et de leurs logarithmes.

Voici le résumé des résultats obtenus par ce relèvement :

Position du navire............	$L = 21^h 59^m 54^s$ $\lambda = 52°8'$
Correction du chronomètre....	$-58^s,5$
Correction de la boussole......	$+15°35' = D + \delta$

On en déduira la déviation δ pour le cap actuel du navire si D est connu.

FIN.

5360 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

